Ministerium für
Schule und Weiterbildung
des Landes Nordrhein-Westfalen

BERUFSKOLLEG
Berufliches Gymnasium

Hilfsmittelfreie Prüfungsaufgaben im Fach Mathematik

Ergänzende Handreichung

zu den Vorgaben für die Abiturprüfung ab 2017

in den Bildungsgängen des Berufskollegs Anlage D 1 – D 28

Herausgegeben vom

Ministerium für Schule und Weiterbildung

des Landes Nordrhein-Westfalen

Referat 312,

Mai 2015

Erstellt von den Aufgabenkommissionen für das Zentralabitur am Beruflichen Gymnasium unter der Leitung von LRSD Friedhelm Horst

Friedhelm Horst	(Bezirksregierung Münster)
Karl-Theo Berg	(Friedrich-List-Berufskolleg Hamm)
Svenja Langendorf	(Eugen-Schmalenbach-Berufskolleg Halver)
Diana Ryll	(Pictorius-Berufskolleg Coesfeld)
Hubertus Schulte Huxel	(Hans-Böckler-Berufskolleg Marl)
Joachim Spitz	(Heinrich-Hertz-Berufskolleg Düsseldorf)

Mai 2015

Inhalt

Erläuterungen und Hinweise 4

Beispielaufgaben für den Weiteren Leistungskurs Mathematik
(Fachbereich Technik)

- Analysis 6
- Analytische Geometrie 13
- Lineare Algebra 16
- Stochastik 20

Beispielaufgaben für den Weiteren Leistungskurs Mathematik
(Fachbereich Informatik)

- Analysis 24
- Stochastik 29
- Analytische Geometrie 35
- Lineare Algebra 37
- Zahlentheorie 39

Beispielaufgaben für den Weiteren Leistungskurs Mathematik
(Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung)

- Analysis 41
- Lineare Algebra 46
- Stochastik 50

Beispielaufgaben für den Grundkurs Mathematik
(Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung)

- Analysis 56
- Lineare Algebra 59
- Stochastik 62

Beispielaufgaben für den Grundkurs Mathematik
(Fachbereich Gestaltung)

- Analysis 65
- Analytische Geometrie 69
- Stochastik 74

Bildnachweis 77

Erläuterungen und Hinweise

Das Land Nordrhein-Westfalen hat sich mit Runderlass vom Juni 2012[1] dazu entschieden, im Zentralabitur ab 2017 graphikfähige Taschenrechner (GTR) und Computeralgebrasysteme (CAS) zuzulassen, und erfüllt damit die Forderung der Bildungsstandards Mathematik[2] nach vermehrtem Einsatz zeitgemäßer technischer Hilfsmittel. Dies entspricht auch der aktuellen fachdidaktischen Diskussion zur Förderung konzeptionellen Wissens im Mathematikunterricht. Gleichzeitig wird der Wert hilfsmittelfreier Aufgaben nicht zuletzt mit Blick auf den Übergang von Schule zum Studium herausgestellt. Im Sinne eines konstruktivistischen Verständnisses sollen Aufgaben, die ohne Hilfsmittel gelöst werden, helfen, Mathematik mehr als Prozess und weniger als Produkt oder starres Regelsystem zu verstehen.

GTR und CAS sind in der Lage, umfangreiche Rechnungen in kurzer Zeit zu bewältigen. Damit ist es möglich, Aufgabenstellungen zu bearbeiten, die sonst nicht realisierbar wären. Allerdings kann die Technologie auch zur Bearbeitung einfacher Basisaufgaben verwendet werden. Es besteht die Gefahr, dass Lernende notwendige Basiskompetenzen nicht in ausreichender Weise ausprägen.

Um dies zu vermeiden ist es nötig, entsprechende kognitive Leistungen auch ohne technische Unterstützung zu erbringen. Dementsprechend wird es ab dem Jahr 2017 im Zentralabitur am Beruflichen Gymnasium im Fach Mathematik einen Aufgabenteil geben, für dessen Bearbeitung keine Hilfsmittel zugelassen sind.

Die Ausführungen dieser Handreichung sind als Ergänzung der jeweils gültigen Vorgaben für die Abiturprüfung im Hinblick auf den hilfsmittelfreien Prüfungsteil (Aufgabenteil A) zu verstehen.

Zur Bearbeitung des Aufgabenteils A sind lediglich Schreib- und Zeichenwerkzeuge sowie ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung zulässig. Andere Hilfsmittel, insbesondere elektronische Geräte, Formelsammlungen oder Tabellen, sind nicht zugelassen.

Der Aufgabenteil A besteht aus einer Aufgabe mit vier Teilaufgaben (Leistungskurs) bzw. drei Teilaufgaben (Grundkurs). Jede Teilaufgabe wird mit der gleichen Punktzahl bewertet. Der Aufgabenteil A umfasst 20 % der Gesamtpunktzahl (ohne Darstellungsleistung). Die Bearbeitungszeit für den Aufgabenteil A beträgt maximal 50 Minuten (Leistungskurs) bzw. maximal 35 Minuten (Grundkurs).

Für den hilfsmittelfreien Aufgabenteil A gelten die inhaltlichen Schwerpunkte und die Operatorenliste der jeweils gültigen Abiturvorgaben. Eine Zusammenstellung von

1 Gebrauch von graphikfähigen Taschenrechnern im Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe und des Beruflichen Gymnasiums, RdErl. d. Ministeriums für Schule und Weiterbildung vom 27.6.2012

2 Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife, Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012

Teilaufgaben zu einem Aufgabenteil A wird die für die Kursarten und Fachbereiche festgelegten Gewichtungen der Anforderungsniveaus berücksichtigen. Die Teilaufgaben decken drei prüfungsrelevante Sachgebiete ab. Im Leistungskurs sind zwei der vier Teilaufgaben der Analysis zuzuordnen. Bei mindestens zwei Teilaufgaben sind Anwendungsbezüge aus dem jeweiligen Fachbereich vorgesehen. Werden technologiebedingt unterschiedliche Aufgabensätze gestellt, so ist der Aufgabenteil A für die Aufgabensätze dieses Fachbereichs identisch.

Zur Überprüfung der notwendigen Basiskompetenzen können Aufgaben formuliert werden, bei denen die Prüflinge z. B.:

- elementare Berechnungen durchführen,
- einfache Lösungswege vor dem Hintergrund eines Anwendungszusammenhangs aufzeigen,
- graphische Darstellungen erstellen und interpretieren,
- zentrale mathematische Begriffe der jeweiligen Sachgebiete und Fachbereiche in einem beruflich geprägten Kontext anwenden,
- mathematische Zusammenhänge und mathematische Strukturen im jeweiligen Aufgabenkontext erläutern und reflektieren,
- Lösungen und Lösungswege beurteilen.

Die auf den folgenden Seiten dargestellten Beispielaufgaben sollen ein Spektrum möglicher Aufgabentypen aufzeigen und illustrieren, wie Aufgaben für die Bereiche Analysis, Lineare Algebra/Analytische Geometrie und Stochastik aussehen können, die dem jeweiligen Fachlehrplan Mathematik entsprechen. Sie sollen den Lehrkräften als Orientierung bei der Erstellung hilfsmittelfreier Aufgaben dienen und sind insofern nicht als abschließende Festlegung von Aufgabenstrukturen anzusehen.

Die Beispielaufgaben sind unabhängig von den inhaltlichen Schwerpunkten eines bestimmten Abiturjahres erstellt worden. Die für die zentrale schriftliche Abiturprüfung zu entwickelnden Abituraufgaben unterliegen hinsichtlich der jeweils verbindlichen Unterrichtsinhalte den Festlegungen in den jeweils gültigen Abiturvorgaben (siehe Punkt 3 der jeweiligen Abiturvorgaben).

Beispielaufgaben für den Weiteren Leistungskurs Mathematik (Fachbereich Technik)

Analysis

Aufgabe 1 (Analysis)

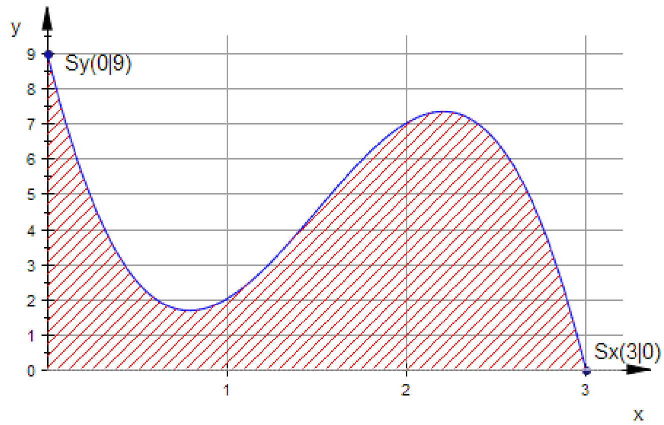
Ein metallverarbeitender Betrieb fertigt Metallplatten nach kundenspezifischen Vorgaben.

Diese werden mittels eines Lasers aus rechteckigen Platten in beliebigen Abmessungen ausgeschnitten.

Ein Kunde wünscht eine Platte in der Form der abgebildeten schraffierten Fläche.

Die Kontur wird durch die Funktion f mit $f(x) = -4 \cdot x^3 + 18 \cdot x^2 - 21 \cdot x + 9$ beschrieben.

Alle Angaben in dm.



1.1 Begründen Sie, dass das Mindestmaß der zu verwendenden Metallplatte 27 dm² betragen muss.

2 Punkte

1.2 Ermitteln Sie den Anteil an Ausschuss, wenn die Kontur aus dieser Platte geschnitten wird.

4 Punkte

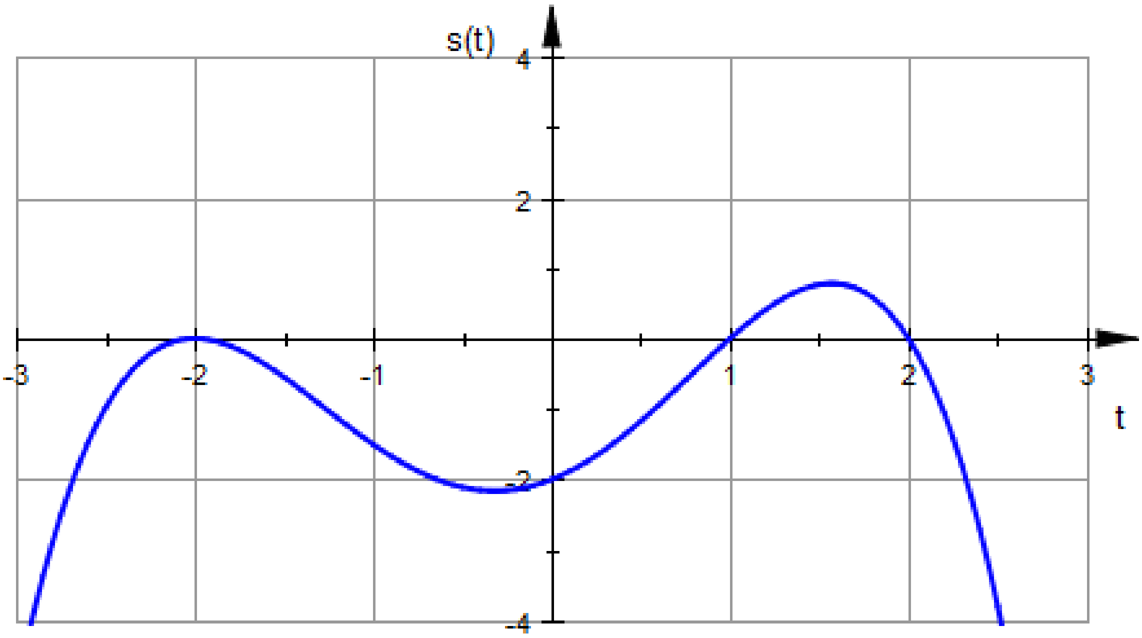
Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
1.1	**… begründet, dass das Mindestmaß 27 dm² betragen muss.**	**2 (I)**
	Breite = x-Koordinate der Nullstelle, hier 3 dm Höhe = Lage des Schnittpunktes mit der y-Achse, hier 9 dm Dabei ist zu berücksichtigen, dass das Maximum des Funktionsgraphen erkennbar eine y-Koordinate kleiner als 8 hat. Die Mindestfläche ergibt sich dann aus $A = 9 \cdot 3 = 27$ dm².	

1.2	**… ermittelt den Anteil an Ausschuss über die Berechnung des Flächenanteils unter dem Funktionsgraphen …**	**4 (II)**
	Es ist der Flächenanteil unter dem Funktionsgraphen an einer Platte mit den Abmessungen $3 \cdot 9 = 27\ \mathrm{dm}^2$ zu berechnen. Die gegebenen Achsenschnittpunkte liefern die Integrationsgrenzen. Das Integral: $$\int_0^3 f(x)dx$$ liefert: $$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (-4 \cdot\ x^3 + 18 \cdot x^2 - 21 \cdot x + 9)dx = \left[- x^4 + 6 \cdot x^3 - \frac{21}{2} \cdot x^2 + 9 \cdot x\right]_0^3$$ Berechnung: $$\begin{aligned}\int_0^3 f(x)dx &= -3^4 + 6 \cdot 3^3 - \frac{21}{2} \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 0 \\ &= -81 + 6 \cdot 27 - \frac{21}{2} \cdot 9 + 27 \\ &= -81 + 162 - \frac{189}{2} + 27 \\ &= 108 - 94{,}5 = 13{,}5\end{aligned}$$ Der Anteil an der Gesamtfläche ergibt sich dann zu: $$\frac{13{,}5}{27} = \frac{1}{2}$$ Es wird die Hälfte einer Platte von 27 dm² benötigt. Ausdrücklich nicht gefordert sind produktionstechnische Überlegungen, ob der „Verschnitt“ symmetrisch zur gewünschten Fläche liegt. Hierzu wären weitergehende Berechnungen, wie z. B. Berechnung des Hoch- und Tiefpunktes oder Berechnung der Lage des Wendepunktes erforderlich. Es zeigt sich dann, dass die ausgeschnittene Fläche symmetrisch zur Verschnitt-Fläche liegt. Insofern ist eine Antwort „Kein Verschnitt“, Anteil Ausschuss=0, bei den entsprechenden Begründungen auch als richtig anzusehen.	

Aufgabe 2 (Analysis)

Ein Fahrzeug bewegt sich auf einer geradlinigen Bahn gemäß der Funktion s. Nachfolgend ist der Graph der Funktion s gegeben, die jedem Zeitpunkt t die Position $s(t)$ zuordnet, an der sich das Fahrzeug befindet. (t in Zeiteinheiten, $s(t)$ in Wegeinheiten).



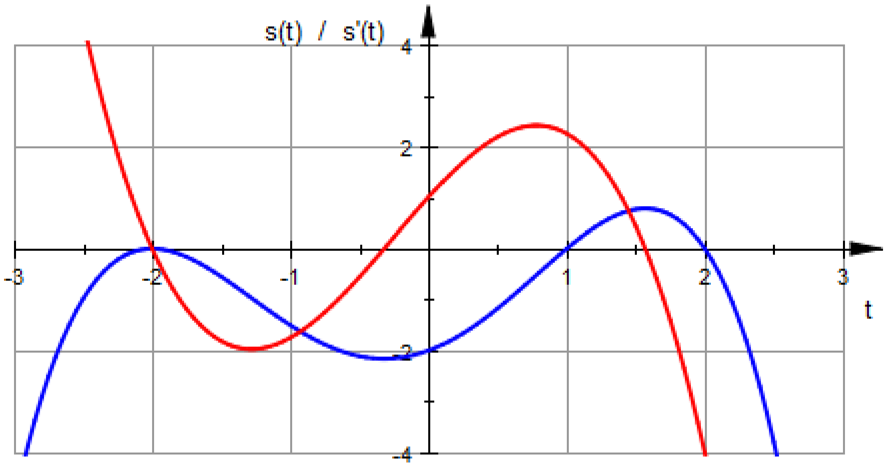
2.1 Skizzieren Sie in dem Koordinatensystem den Graphen der ersten Ableitungsfunktion.

4 Punkte

2.2 Erläutern Sie die Bedeutung der Ableitung in diesem Sachzusammenhang.

2 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
2.1	**… skizziert den Graph der ersten Ableitung.**	**4 (I)**
	Lösung:  Die Lösungszeichnung sollte beinhalten: - Lage der Nullstellen bei den Extremstellen von s - Richtige Vorzeichenbereiche der ersten Ableitung - Lage der Extremstellen von s' in der Nähe der erkennbaren Wendestellen von s	
2.2	**… erläutert die Bedeutung der Ableitung.**	**2 (II)**
	Die Ableitung gibt die Änderungsrate der Funktion s an. s beinhaltet die Position des Fahrzeugs zu jedem Zeitpunkt. Damit gibt die Ableitung als Grenzwert des Differenzen-quotienten die Geschwindigkeit des Fahrzeugs in Wegeinheiten je Zeiteinheit an.	

Aufgabe 3 (Analysis)

Ein Aufzug bewegt sich nach der Weg-Zeit-Funktion h mit

$h(t) = \frac{1}{3} \cdot t^3 - 3 \cdot t^2 + 36$, $t \in [0; 6]$

t gibt die Zeit in Sekunden an, $h(t)$ die Höhe in Meter.

Die erste Ableitung $h'(t)$ der Weg-Zeit-Funktion gibt die Geschwindigkeit des Aufzugs an.

3.1 Bestätigen Sie, dass die Geschwindigkeit des Aufzugs zu den Zeitpunkten $t_1 = 0$ und $t_2 = 6$ Null ist.

2 Punkte

3.2 Bestimmen Sie den Zeitpunkt $t_3 \in [0; 6]$, in dem die Geschwindigkeit extremal wird und

geben Sie den Wert der extremalen Geschwindigkeit und die Fahrtrichtung des Aufzugs zu diesem Zeitpunkt an.

4 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
3.1	**… bestätigt, dass die Geschwindigkeit Null ist.**	**2 (I)**
	Erste Ableitung der Funktion h liefert $h'(t) = t^2 - 6 \cdot t$: Einsetzen der Stellen t_1 und t_2 liefert: $h'(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 = 0$ sowie $h'(6) = 6^2 - 6 \cdot 6 = 0$. Alternativ werden die beiden Nullstellen der (quadratischen) ersten Ableitung berechnet.	
3.2	**… bestimmt den Zeitpunkt als Nullstelle der zweiten Ableitung …** **… und gibt den Wert der Geschwindigkeit und die Fahrtrichtung … an.**	**2 (II)** **2 (I)**
	Zweite Ableitung der Funktion h liefert $h''(t) = 2 \cdot t - 6$ Bestimmung der Nullstelle von h'' liefert $t_3 = 3$ Überprüfung einer hinreichenden Bedingung, z. B. hier der dritten Ableitung: $h'''(3) = 2 > 0$ zeigt, dass es sich um ein Minimum der Geschwindigkeit handelt. Die Nullstellen der ersten Ableitung liegen am Rand, daher keine weitergehende Randbetrachtung erforderlich. Berechnung der Geschwindigkeit im Zeitpunkt $t_3 = 3$: $h'(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 = -9$ (m/s), d. h. der Aufzug fährt mit (betragsmäßig) maximaler Geschwindigkeit abwärts.	

Aufgabe 4 (Analysis)

Über ein 200 m breites Tal soll eine parabelförmige Bogenbrücke gespannt werden. Die Auflagepunkte der Brücke sollen in den Punkten $A(0|0)$ und $B(200|0)$ liegen.

Aus statischen Gründen soll der Scheitelpunkt der Brücke 50 m über den Auflagepunkten liegen.

4.1 Geben Sie die Öffnungsrichtung der Parabel an.

1 Punkt

4.2 Leiten Sie die Funktionsvorschrift der quadratischen Funktion her, die den Brückenbogen beschreibt.

5 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
4.1	**… gibt die Öffnungsrichtung der Parabel an.**	**1 (I)**
	Der Scheitelpunkt liegt über den Auflagepunkten, also Öffnungsrichtung nach unten.	
4.2	**… leitet die Funktionsvorschrift her.**	**5 (III)**
	Je nach gewähltem Ansatz der Prüflinge sind verschiedene Lösungswege möglich: Ansatz der Scheitelpunktform: Die Punkte A und B liegen auf gleicher Höhe, also muss der Scheitelpunkt horizontal genau dazwischen liegen, d. h. $x_s = 100$. Aus den Angaben ist zu entnehmen: $y_s = 50$. Ansatz der Scheitelform: $p(x) = a \cdot (x - 100)^2 + 50$. Einsetzen eines der Punkte A oder B liefert eine Bestimmungsgleichung für a Hier z. B. $0 = a \cdot (200 - 100)^2 + 50$ $\Leftrightarrow a = -\frac{50}{100^2} = -\frac{1}{200} = -0{,}005$ $p(x) = -0{,}005 \cdot (x - 100)^2 + 50$ Ansatz der Linearfaktorform: Gegeben sind zwei Nullstellen, daher bietet sich der Ansatz an: $p(x) = a \cdot (x - 0) \cdot (x - 200) = a \cdot x \cdot (x - 200)$	

Einsetzen des Scheitelpunkts bei Argumentation wie oben:

$$50 = a \cdot 100 \cdot (100 - 200)$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{50}{100^2} = -\frac{1}{200} = -0{,}005$$

und Angabe:

$$p(x) = -0{,}005 \cdot x \cdot (x - 200)$$

Ansatz der allgemeinen Form:

$$p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

liefert unter Verwendung der gegebenen Punkte

A: $0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$

B: $0 = a \cdot 200^2 + b \cdot 200 + c$

S: $50 = a \cdot 100^2 + b \cdot 100 + c$

Das Gleichungssystem:

$$\begin{vmatrix} c = 0 \\ 40000 \cdot a + 200 \cdot b + c = 0 \\ 10000 \cdot a + 100 \cdot b + c = 50 \end{vmatrix}$$

Einsetzen der Gleichung I in II und II sowie die Operation $II - 2 \cdot III$ liefert die Bestimmungsgleichung für a:

$$\begin{aligned} &40000 \cdot a - 20000 \cdot a + 0 \cdot b = -2 \cdot 50 \\ &\Leftrightarrow 20000 \cdot a = -100 \\ &\Leftrightarrow a = -\frac{100}{20000} = -\frac{1}{200} = -0{,}005 \end{aligned}$$

Einsetzen z. B. in Gleichung II liefert:

$$\begin{aligned} &40000 \cdot \left(-\frac{1}{200}\right) + 200 \cdot b = 0 \\ &\Leftrightarrow 200 \cdot b = 200 \Leftrightarrow b = 1 \end{aligned}$$

Angabe der Funktionsvorschrift:

$p(x) = -\frac{1}{200} \cdot x^2 + x$

Analytische Geometrie

Aufgabe 5 (Analytische Geometrie)

Im Kontrollzentrum eines Flughafens werden die Bahnen zweier gleichzeitig startender Flugzeuge durch Geraden modelliert.

Flugzeug 1 bewegt sich auf der Geraden g_1 mit

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 200 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}^{\geq 0},$$

Flugzeug 2 bewegt sich auf der Geraden g_2 mit

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 250 \\ 200 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 200 \\ 15 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}^{\geq 0}.$$

Alle Angaben in Meter, t in Sekunden.

5.1 Bestätigen Sie, dass sich die x_1-Koordinaten der beiden Flugzeuge zunächst einander annähern.

2 Punkte

5.2 Erläutern Sie, welches Flugzeug schneller an Höhe gewinnt, und entscheiden Sie, ob es zu einer Kollision der Flugzeuge kommen kann.

4 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
5.1	**… bestätigt, dass sich die x_1-Koordinaten … annähern.**	**2 (I)**
	Zum Zeitpunkt t = 0 beträgt der Unterschied der x_1-Koordinaten 150 m. Je Sekunde verringert sich die x_1-Koordinate des Flugzeugs 2 um 2 (m) und die x_1-Koordinate des Flugzeugs 1 vergrößert sich um 1 (m), d. h. nach 50 Sekunden besitzen beide Flugzeuge die gleiche x_1-Koordinate.	
5.2	**… erläutert, welches Flugzeug schneller an Höhe gewinnt.** **… entscheidet, ob es zu einer Kollision … kommen kann.**	**2 (I)** **2 (II)**
	Je Zeiteinheit gewinnt Flugzeug 1 10 m an Höhe (in x_3-Richtung), während Flugzeug 2 mit Steiggeschwindigkeit von 15 m je Sekunde steigt. Flugzeug 2 steigt also schneller. Beide Flugzeuge starten in x_2-Richtung nebeneinander, bei t = 0 besitzen sie dieselbe x_2-Koordinate, und auf der gleichen Höhe, die x_3-Koordinate ist ebenfalls identisch. Da Flugzeug 2 schneller steigt, kann es somit nicht mehr zur Kollision kommen.	

Aufgabe 6 (Analytische Geometrie)

In einem Garten ist ein viereckiges Sonnensegel zur Beschattung einer Terrasse gespannt. Die Eckpunkte des Segels sind $A(10|1|2)$, $B(10|9|2)$, $C(6|9|5)$ und $D(6|1|5)$. Die Oberfläche der Terrasse liegt in der x_1-x_2-Ebene.

6.1 Bestätigen Sie, dass das Segel rechteckig ist und berechnen Sie die Fläche des Sonnensegels.

3 Punkte

6.2 Die Sonneneinstrahlung erfolgt in Richtung des Vektors $\overrightarrow{r_S} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Prüfen Sie, ob der Punkt $P(8|5|0)$ im Schatten liegt.

3 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
6.1	**… bestätigt die Eigenschaften eines Rechtecks.** **… berechnet die Fläche des Rechtecks.**	**2 (II)** **1 (I)**
	Aus der Lage der Eckpunkte ergeben sich die Kantenvektoren: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 10-10 \\ 9-1 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6-10 \\ 9-9 \\ 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 6-6 \\ 1-9 \\ 5-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 6-10 \\ 1-1 \\ 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ Damit ist offensichtlich $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, d. h. das Viereck ist ein Parallelogramm. Berechnung eines Winkels über das Skalarprodukt liefert: $\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ d. h. der Winkel am Punkt A ist ein rechter Winkel, damit ist das Viereck ein Rechteck. Für die Seitenlängen des Rechtecks ergibt sich: $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = 8$ und $\lvert\overrightarrow{AD}\rvert = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$, d. h. die Fläche des Sonnensegels beträgt 40 m².	

6.2	**… prüft, ob der Punkt … im Schatten liegt.**	**3 (III)**
	Die Gerade durch den Punkt P mit Richtungsvektor $-\overrightarrow{r_S}$ schneidet die Ebene in der das Sonnensegel liegt: Festlegung der Ebene in Koordinatenform: $$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 3 - 0 \\ 0 - 0 \\ 0 - (-4) \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ 32 \end{pmatrix}$$ Wahl als Normalenvektor der Ebene: $$\overrightarrow{n_{E_{Segel}}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$ Verwendung des Punktes A $\overrightarrow{n_{E_{Segel}}} * \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 30 + 8 = 38$ liefert die Koordinatengleichung: $$E_{Segel}:\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_3 = 38$$ Der Verlauf eines Sonnenstrahls zum Punkt P folgt der Gerade $$g: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + u \cdot (-\overrightarrow{r_S}) = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u \in \mathbb{R}$$ Ermittlung des Schnittpunkts von g mit der Sonnensegelebene durch Einsetzen in die Koordinatengleichung: $$3 \cdot (8 + u) + 4 \cdot u = 38$$ $$\Leftrightarrow 7 \cdot u = 14 \Leftrightarrow u = 2$$ Der Schnittpunkt mit der Segelebene liegt dann im Punkt: $$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$ Der Vergleich der Koordinaten mit denjenigen der Punkte A bis D zeigt, dass dieser Punkt auf der Kante AB liegt, d. h. der Punkt P liegt soeben noch im Schatten. Alternativ ist die Projektion des Sonnensegels auf die x_1-x_2-Ebene zu berechnen und zu prüfen, ob der Punkt P in diesem Viereck liegt.	

Lineare Algebra

Aufgabe 7 (Lineare Algebra)

Zur Umrechnung von 2D-Bildschirmkoordinaten $\vec{x}$ aus einem Koordinatensystem in ein anderes wird die Abbildung:

$$a: \overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} {x_1}' \\ {x_2}' \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

mit einer Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

verwendet.

7.1 Leiten Sie die Matrix der Umkehrabbildung her.

2 Punkte

7.2 Geben Sie eine 2x2-Matrix an, die nicht invertierbar ist und begründen Sie Ihre Wahl.

4 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
7.1	**… leitet die Matrix der Umkehrabbildung her.**	**2 (II)**
	Ein möglicher Weg zur Inversen Matrix: $$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$ $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$ $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$ $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$ Damit: $$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = M^{-1}$$	

7.2	**… gibt eine 2x2-Matrix an.** **… begründet die Wahl.**	**2 (II)** **2 (III)**
	Der Prüfling gibt eine beliebige nicht invertierbare Matrix an. Mögliche Lösung: $$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ oder $$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ und begründet seine Wahl mit z. B. - der Anzahl linear unabhängiger Zeilen - dem Bild der Basisvektoren - dem Urbild des Nullvektors oder ähnlich.	

Aufgabe 8 (Lineare Algebra)

Ein PC-Hersteller bietet Gamer- und Office-PC an. In beide werden Speicherbausteine und Erweiterungskarten von Fremdherstellern eingebaut.

Für einen Office-PC werden zwei Speicherbausteine, für einen Gamer-PC hingegen vier Speicherbausteine verwendet. In jedes Gerät wird eine Erweiterungskarte eingebaut.

8.1 Berechnen Sie die Anzahl an Speicherbausteinen und Erweiterungskarten, welche für eine Monatsproduktion an 200 Gamer-PC und 150 Office-PC bestellt werden müssen.

2 Punkte

8.2 Am Lager des Herstellers befinden sich 640 Speicherbausteine und 200 Erweiterungskarten. Die Lagervorräte sollen komplett verbraucht werden.

Stellen Sie das Gleichungssystem zur Berechnung der Produktionsmengen auf und ermitteln Sie die damit möglichen Produktionsmengen.

4 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
8.1	**… berechnet die Anzahl an …**	**2 (I)**
	b_1: Anzahl der benötigten Speicherbausteine b_2: Anzahl der benötigten Erweiterungskarten $b_1 = 4 \cdot 200 + 2 \cdot 150 = 1100$ $b_2 = 1 \cdot 200 + 1 \cdot 150 = 350$ Es werden 1100 Speicherbausteine und 350 Erweiterungskarten benötigt.	
8.2	**… stellt das Gleichungssystem … auf.** **… ermittelt die … Produktionsmengen.**	**2 (I)** **2 (II)**
	Mit den Bezeichnungen: b_1: Anzahl der vorhandenen Speicherbausteine b_2: Anzahl der vorhandenen Erweiterungskarten x_1: Anzahl der zu produzierenden Gamer-PC x_2: Anzahl der zu produzierenden Office-PC Ergibt sich das Gleichungssystem: $\left\vert\begin{array}{l} b_1 = 4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \\ b_2 = 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \end{array}\right\vert$	

bzw. in Matrizenform:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

Darstellung in erweiterter Matrizenform:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 640 \\ 1 & 1 & 200 \end{array}\right)$$

Mittels Zeilenumformungen ergibt sich:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 240 \\ 1 & 1 & 200 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 120 \\ 1 & 1 & 200 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 120 \\ 0 & 1 & 80 \end{array}\right)$$

Die Lagervorräte können mit einer Produktion von 120 Gamer-PC und 80 Office-PC komplett aufgebraucht werden.

Stochastik

Aufgabe 9 (Stochastik)

Ein Unternehmen stellt Speicherbausteine auf zwei Produktionsanlagen „A“ und „B“ und in zwei Qualitätsstufen „Q_1“ und „Q_2“ her. Die Produktion erfolgt auf beiden Anlagen zu gleichen Teilen. Die Bausteine von Anlage „A“ genügen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,6 den Anforderungen an die höhere Qualität „Q_1“; hingegen erreichen die Bausteine von Anlage „B“ diese Qualitätsstufe nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,4.

9.1 Stellen Sie den gegebenen Sachverhalt in einer Vierfeldertafel dar.

3 Punkte

9.2 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten,

- dass ein zufällig ausgewählter Baustein Stufe Q_2 erreicht und
- dass ein Baustein der Stufe Q_2 von Anlage B stammt.

3 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
9.1	**… stellt die Daten in einer Vierfeldertafel dar.**	**3 (I)**
	Entweder ist ein Baustein von Anlage A oder von Anlage B, entweder erfüllt er die Qualitätsstufe Q1 oder die Qualitätsstufe Q2: Damit ergibt sich aus diesen beiden Merkmalen die Tabellenstruktur:	

	A	B	
Q1			
Q2			
			1

Die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten in den Zellen erfolgt mit dem Satz von Bayes am Beispiel von $P(A \cap Q_1)$.

$$P_A(Q_1) = \frac{P(A \cap Q_1)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A \cap Q_1) = P(A) \cdot P_A(Q_1)$$

Damit hier: $P_A(Q_1) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}3$

Es ergibt sich die Vierfeldertafel:

	A	B	
Q1	0,3	0,2	0,5
Q2	0,2	0,3	0,5
	0,5	0,5	1

9.2	**… ermittelt die beiden Wahrscheinlichkeiten.**	**1 (II)** **2 (II)**
	Mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit ergibt sich: $P(Q_2) = P(A) \cdot P_A(Q_2) + P(B) \cdot P_B(Q_2)$ $= P(A) \cdot (1 - P_A(Q_1)) + P(B) \cdot (1 - P_B(Q_1))$ $= 0{,}5 \cdot (1 - 0{,}6) + 0{,}5 \cdot (1 - 0{,}4) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}5$ Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit: $P_{Q_2}(B)$ Mit der Formel von Bayes ergibt sich: $P_{Q_2}(B) = \frac{P(B \cap Q_2)}{P(Q_2)} = \frac{P(B) - P(B \cap Q_1)}{P(Q_2)} = \frac{P(B) - P(B) \cdot P_B(Q_1)}{P(Q_2)} = \frac{0{,}5 - 0{,}5 \cdot 0{,}4}{0{,}5} = 0{,}6$ Alternativ können die gesuchten Wahrscheinlichkeiten aus der Vierfeldertafel oder einem Baumdiagramm entnommen werden.	

Aufgabe 10 (Stochastik)

Ein Waschmittelhersteller füllt u. a. das Produkt „*WaschRein*“ in Packungen zu 3 kg Inhalt ab. Diese Abfüllmasse wird nach seinen Angaben mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von mindestens $p = 0{,}95$ erreicht. Ein Kunde bezweifelt diese Angabe.

10.1 Formulieren Sie die beiden möglichen Standpunkte und daraus abzuleitende zu testende Hypothesen für die Beteiligten.

4 Punkte

10.2 Betrachtet wird die Zufallsgröße
X: Anzahl der Packungen mit mindestens 3 kg Inhalt unter n untersuchten Packungen.

Erläutern Sie die Bedeutung von Werten der Zufallsgröße nahe dem Erwartungswert.

2 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
10.1	**… formuliert die beiden möglichen Standpunkte und Hypothesen.**	**4 (III)**
	Der Waschmittelhersteller sagt eine Mindest-Abfüllmenge mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit $p = 0{,}95$ zu. Sein Standpunkt (H_1) ist also: $p \geq p_0 = 0{,}95$. Er wird die Hypothese (H_0): $p < p_0$ testen, denn nur wenn diese verworfen werden kann, kann er Argumente für seinen Standpunkt ableiten. Die Kunden des Waschmittelherstellers sind kritisch, sie befürchten, dass zu wenig Inhalt in den Packungen sein könnte. Deren Standpunkt (H_1) ist also: $p < p_0 = 0{,}95$. Sie werden die Hypothese (H_0): $p \geq p_0$ testen, denn nur wenn diese verworfen werden kann, können sie Argumente für ihren Standpunkt ableiten.	
10.2	**… erläutert die Bedeutung von Werten der Zufallsgröße …**	**2 (III)**
	Je nach Standpunkt werden unterschiedliche Positionen eingenommen und damit unterschiedliche Hypothesen getestet. In jedem Fall sind aber signifikante Abweichungen vom Erwartungswert interessant. Werte der Zufallsgröße nahe dem Erwartungswert werden also bei genügend hohem Stichprobenumfang in jedem Fall im Annahmebereich (beider) Hypothesen liegen. Damit kann die Hypothese nicht verworfen werden; es liegen keine aussagekräftigen Ergebnisse vor.	

Aufgabe 11 (Stochastik)

Ein Hersteller elektrotechnischer Bauteile produziert u. a. elektrische Widerstände. Am Ende einer Fertigungslinie wird automatisiert untersucht, ob die farbliche Kodierung des Widerstandswerts angebracht wurde und ob die Länge der Beinchen ausreichend ist.

Eine automatisierte Qualitätskontrolle einer Produktion von 100 000 Widerständen der Größe 33 $k\Omega$ lieferte bei 20 Stück einen fehlerhaften Farbcode, bei 15 dieser Widerstände waren ebenfalls fehlerhafte Beinchenlängen zu beobachten. 99 000 Widerstände wiesen passende Beinchenlängen auf.

11.1 Formulieren Sie Ereignisse zur Beschreibung dieses Sachverhalts und stellen Sie die Versuchsergebnisse in einer Vierfeldertafel dar.

4 Punkte

11.2 Berechnen Sie die Anzahl der Widerstände, die keinen der beiden Produktionsmängel aufweisen.

2 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

<table>
<tr><td>
11.1</td><td>Der Prüfling …

… formuliert Ereignisse.
… stellt diese dar.</td><td>Punkte

2 (I)
2 (II)</td></tr>
<tr><td></td><td>Es bezeichnen die Ereignisse:
F bzw. $\bar{F}$: Farbcode des Widerstands ist o.k. bzw. nicht o.k.
B bzw. $\bar{B}$: Beinchenlänge des Widerstands ist o.k. bzw. nicht o.k.

Darstellung in der Vierfeldertafel:
<table>
<tr><td></td><td>F</td><td>$\bar{F}$</td><td></td></tr>
<tr><td>B</td><td>98 995</td><td>5</td><td>99 000</td></tr>
<tr><td>$\bar{B}$</td><td>985</td><td>15</td><td>1000</td></tr>
<tr><td></td><td>99 980</td><td>20</td><td>100 000</td></tr>
</table>
(gegebene Daten fett dargestellt).</td><td></td></tr>
<tr><td>11.2</td><td>… berechnet die Anzahl der Widerstände.</td><td>2 (II)</td></tr>
<tr><td></td><td>Anzahl Widerstände mit fehlerhaftem Farbcode 20
davon Widerstände mit falschem Farbcode und falscher Beinchenlänge: 15
d. h. Farbcode falsch und Beinchenlänge passend: 5
Gesamtanzahl der Widerstände mit passender Beinchenlänge: 99 000
D. h. es mussten 98 995 Widerstände passende Beinchenlänge und korrekten Farbcode aufweisen.</td><td></td></tr>
</table>

Beispielaufgaben für den Weiteren Leistungskurs Mathematik (Fachbereich Informatik)

Diese Beispielaufgaben beinhalten auch zwei Teilaufgaben zur Zahlentheorie, entsprechend dem Lehrplan zum weiteren Leistungskurs Mathematik im Fachbereich Informatik und den zugehörigen Abiturvorgaben.

Analysis

Aufgabe 1 (Analysis)

In einem Netzwerk wird die Datenübertragungsrate durch eine ganzrationale Funktion f mit $f(t) = -t^3 + 24 \cdot t^2$ beschrieben. Dabei gilt $0 \leq t \leq 24$. Es gibt t die Zeit in Stunden und $f(t)$ die Datenübertragungsrate in 1000 Mbit/h an.

1.1 Berechnen Sie die Zeitpunkte, zu denen keine Daten übertragen werden.

2 Punkte

1.2 Bestimmen Sie den Zeitpunkt t, an dem die Datenübertragungsrate maximal wird.

Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass die lokalen Maximalstellen auch die absoluten Maximalstellen sind.

4 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
1.1	**… berechnet die Zeitpunkte, zu denen keine Daten übertragen werden.**	
	$f(t) = 0 \Leftrightarrow -t^3 + 24 \cdot t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 \cdot (-t + 24) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 24$ Nur zu Beginn und am Ende des Zeitraums ist die Übertragungsrate Null.	**2 (I)**
1.2	**… bestimmt den Zeitpunkt, an dem die Datenübertragungsrate maximal wird.**	
	$f'(t) = -3 \cdot t^2 + 48 \cdot t$ und $f''(t) = -6 \cdot t + 48$. $f'(t) = 0 \Leftrightarrow -3 \cdot t^2 + 48 \cdot t = 0 \Leftrightarrow t \cdot (-3 \cdot t + 48) = 0 \Leftrightarrow t_1 = 0 \vee t_2 = 16$ t = 0 ist eine Randstelle. Daher muss nur die Stelle t = 16 untersucht werden. $(f'(16) = 0 \wedge f''(16) = -48 < 0) \Rightarrow t = 16$ ist lokale und damit auch eine absolute Maximalstelle. Nach 16 Stunden ist die Datenübertragungsrate maximal.	**4 (II)**

Aufgabe 2 (Analysis)

Bei einem graphischen Bildschirmschoner bewegt sich ein kleiner Ball auf unterschiedlichen Bahnen auf dem Bildschirm. Dieser kleine Ball wird im Folgenden als Punkt betrachtet.

Diese Bewegungsbahnen werden in einem geeigneten Koordinatensystem modelliert.

2.1 Eine ganzrationale Funktion f vierten Grades beschreibt eine dieser Bahnen. Der Graph von f ist achsensymmetrisch zur y-Achse, hat im Punkt $P(2|0)$ die Steigung 8 und an der Stelle $x_w = 1$ befindet sich eine Wendestelle.

Leiten Sie das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten des Funktionsterms von f her.

4 Punkte

2.2 Eine andere Bewegungsbahn wird durch den Graphen der Funktion g mit $g(x) = 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x$, $x \in \mathbb{R}$ beschrieben.

Bestätigen Sie, dass die Tangenten an die Graphen von g und f an der Stelle $x_P = 2$ parallel verlaufen. ($f'(2) = 8$ darf verwendet werden)

2 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
2.1	**… leitet das lineare Gleichungssystem her.**	**4 (III)**
	$f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ $f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 3 \cdot b \cdot x^2 + 2 \cdot c \cdot x + d$ $f''(x) = 12 \cdot a \cdot x^2 + 6 \cdot b \cdot x + 2 \cdot c$ Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse $\Rightarrow b = 0 \wedge d = 0$ $P(2\|0) \in G(f) \implies f(2) = 0 \implies 16 \cdot a + 4 \cdot c + e = 0.$ $f'(2) = 8 \Rightarrow 4 \cdot a \cdot 2^3 + 2 \cdot c \cdot 2 = 8 \Leftrightarrow 32 \cdot a + 4 \cdot c = 8$ x = 1 Wendestelle $\implies f''(1) = 0 \Rightarrow 12 \cdot a + 2 \cdot c = 0$ Damit ergibt sich das Gleichungssystem: $\left\| \begin{matrix} 16 \cdot a + 4 \cdot c + e = 0 \\ 32 \cdot a + 4 \cdot c = 8 \\ 12 \cdot a + 2 \cdot c = 0 \end{matrix} \right\|$ und $b = 0 \wedge d = 0$	
2.2	**… bestätigt, dass die Tangenten an die Graphen von g und f an der Stelle** …	**2 (I)**
	$g'(x) = 6 \cdot x^2 - 6 \cdot x - 4$ $g'(2) = 6 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 - 4 = 24 - 12 - 4 = 8 = f'(2)$ D. h. die Tangenten an die Graphen von f und g verlaufen an der Stelle $x_P = 2$ parallel.	

Aufgabe 3 (Analysis)

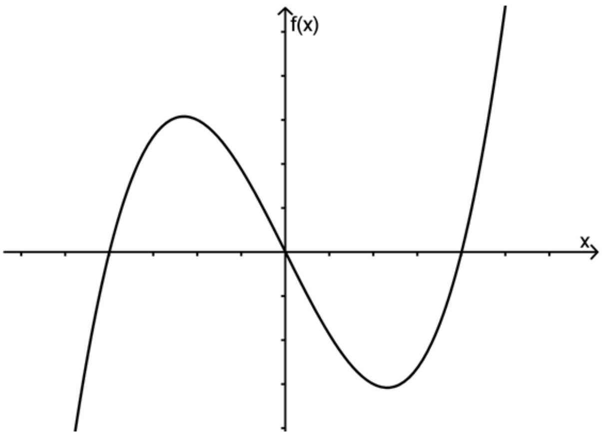
Bei einem graphischen Bildschirmschoner bewegt sich ein kleiner Ball auf unterschiedlichen Bahnen auf dem Bildschirm. Dieser kleine Ball wird im Folgenden als Punkt betrachtet.

Eine dieser Bewegungsbahnen wird durch den Graphen der ganzrationalen Funktion f

mit $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

und $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ beschrieben.

Der zum Ursprung punktsymmetrische Graph von f ist nebenstehend abgebildet.



3.1 Bestätigen Sie, dass hier $b = 0$ und $d = 0$ gelten muss.

2 Punkte

3.2 Begründen Sie, dass in diesem Fall $a > 0$ gelten muss.

2 Punkte

3.3 Der Graph weist zwei lokale Extremstellen auf.

Leiten Sie daraus das Vorzeichen von c her.

2 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
3.1	**… bestätigt, dass *b* = *0* und *d* = *0* …**	**2 (I)**
	Bei dem gewählten Ansatz einer ganzrationalen Funktion 3. Grades: $$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$ ergibt sich aus der Punktsymmetrie zum Ursprung, dass die Terme mit geraden Exponenten entfallen, d. h. $b = 0 \land d = 0$.	

3.2	**… begründet, dass in diesem Fall a > 0 …**	**2 (III)**
	f ist eine ganzrationale Funktion mit ungeradem Grad. Aus dem Globalverlauf des Graphen von *f* bzw. aus: $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ und $f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$ ergibt sich dann: *a > 0*.	
3.3	**… leitet das Vorzeichen von *c* her.**	**2 (III)**
	$f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$ Notwendige Bedingung für lokale Extremstellen: $$f'(x) = 0$$ liefert die quadratische Gleichung $$0 = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$$ Da $a \neq 0$ und $b = 0$ existieren genau dann zwei Lösungen, wenn $0 = x^2 + \frac{c}{3a}$ $\Leftrightarrow -\frac{c}{3a} > 0$ Wegen $a > 0$ folgt: $c < 0$.	

Aufgabe 4 (Analysis)

Die Ausbreitung eines Computervirus lässt sich in Abhängigkeit von der Zeit t (t in Monaten) durch eine Funktion f mit $f(t) = 100 \cdot t \cdot e^{-0,1 \cdot t}$ erfassen.
Dabei gibt $f(t)$ die Anzahl derjenigen PCs (in 1000) an, die sich zum Zeitpunkt t neu infizieren.

4.1 Beweisen Sie, dass die Funktion F mit

$$F(t) = (-1000 \cdot t - 10\,000) \cdot e^{-0,1 \cdot t}$$

eine Stammfunktion von f ist.

4 Punkte

4.2 Es gilt:

$$\frac{1}{24-12} \cdot \int_{12}^{24} f(t)dt \approx 295{,}155$$

Interpretieren Sie dieses Ergebnis im Sachzusammenhang.

2 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
4.1	**… beweist, dass die Funktion F mit ….**	**4 (II)**
	$F'(t) = (-1000) \cdot e^{-\frac{1}{10} \cdot t} + \left(-1000 \cdot t - 10\,000\right) \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) \cdot e^{-\frac{1}{10} \cdot t} =$ $= (-1000 + 100 \cdot t + 1000) \cdot e^{-\frac{1}{10} \cdot t} = 100 \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{10} \cdot t}$	
4.2	**… interpretiert dieses Ergebnis im Sachzusammenhang.**	**2 (III)**
	Im zweiten Jahr werden durchschnittlich pro Monat ca. 295 155 PCs neu infiziert.	

Stochastik

Aufgabe 5 (Stochastik)

Ein Unternehmen produziert USB-Sticks in den Abteilungen A_1, A_2 und A_3.

50 % der Gesamtproduktion stammen aus der Abteilung A_1 und jeweils 25 % aus den Abteilungen A_2 und A_3.

Der Anteil der fehlerhaft produzierten USB-Sticks ist der folgenden Tabelle zu entnehmen:

Abteilung	A_1	A_2	A_3
Anteil der defekten Sticks	1 %	2 %	4 %

In den beiden Teilaufgaben sollen alle genannten Anteile als Wahrscheinlichkeiten verwendet werden.

5.1 Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass ein USB-Stick in Abteilung A_3 produziert wird und nicht defekt ist.

2 Punkte

5.2 Ein USB-Stick ist defekt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dieser USB-Stick in Abteilung A_3 produziert worden ist.

4 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
5.1	**… gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass ein USB-Stick in Abteilung A_3 produziert wird und nicht defekt ist.**	**2 (I)**
	E: Ein USB-Stick wurde in Abteilung A_3 produziert und ist nicht defekt. $P(E)=\frac{1}{4}\cdot\frac{96}{100}=\frac{24}{100}=\frac{6}{25}$	

5.2	**… berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass dieser USB-Stick in Abteilung A_3 produziert worden ist.**	**4 (II)**
	E: Ein defekter USB-Stick wurde in Abteilung A_3 produziert. D: Ein Stick aus der Gesamtproduktion ist defekt. F: Ein Stick wurde in Abteilung A_3 produziert. Zu bestimmen ist: $\mathrm{P(E)} = \mathrm{P_D(F)} = \frac{\mathrm{P(D \cap F)}}{\mathrm{P(D)}}$ Wegen $P(D) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{100} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{100} = \frac{1}{200} + \frac{1}{200} + \frac{2}{200} = \frac{1}{50}$ und $P(D \cap F) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{100} = \frac{1}{100}$ gilt: $\mathrm{P_D(F)} = \frac{\mathrm{P(D \cap F)}}{\mathrm{P(D)}} = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{50}} = \frac{1}{2}$.	

Aufgabe 6 (Stochastik)

6.1 Ein Unternehmen produziert Speicherkarten in großer Stückzahl.

Aus langjähriger Erfahrung ist bekannt, dass durchschnittlich 2 % aller Speicherkarten defekt sind.

Erläutern Sie in diesem Zusammenhang die beiden folgenden Terme einschließlich der Bestandteile und des gewählten Ansatzes.

$$\sum_{i=5}^{12} \binom{100}{i} \cdot 0{,}02^i \cdot 0{,}98^{100-i} \approx 0{,}05083$$

$$\binom{100}{2} \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^{98} \approx 0{,}2734$$

4 Punkte

6.2 In einer Schachtel sind 10 Speicherkarten. Vier dieser Speicherkarten sind defekt.

Es werden zwei Speicherkarten „auf einen Griff“ aus der Schachtel entnommen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau eine dieser beiden Speicherkarten defekt ist.

2 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

6.1	**Der Prüfling …** **… erläutert die beiden Terme einschließlich der Bestandteile und dem gewählten Ansatz.**	**Punkte** **4 (II)**
	Bei dem gewählten Ansatz wird von einem Bernoulli-Experiment mit $n = 100$ ausgegangen. Die binomialverteilte Zufallsvariable X gibt die Anzahl der defekten Speicherkarten an. Die Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}02$ bedeutet hier, dass eine Speicherkarte defekt ist. Die Gegenwahrscheinlichkeit beträgt $q = 1 - p = 0{,}98$. Mit diesem Term wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass von 100 untersuchten Speicherkarten mindestens 5 und höchstens 12 defekt sind. Der Binomialkoeffizient $\binom{100}{\mathrm{i}}$ gibt die Anzahl der Pfade in einem Baumdiagramm mit insgesamt 100 Stufen an, bei denen genau i-mal ein Defekt auftritt. Der Binomialkoeffizient gibt damit die Anzahl der Möglichkeiten an, aus 100 Speicherkarten i Speicherkarten ohne Berücksichtigung der Reihenfolge auszuwählen.	

	Auch im zweiten Fall wird von einer Binomialverteilung mit n = 100 , p = 0,02 und 1 - p = 0,98 ausgegangen. In der vorliegenden Berechnung wird die Wahrscheinlichkeit ermittelt, dass von 100 untersuchten Speicherkarten genau 2 defekt sind. Insgesamt gibt es $\binom{100}{2}$ Pfade und jeder einzelne Pfad hat die Wahrscheinlichkeit von $0{,}02^2 \cdot 0{,}98^{98}$.	
6.2	**… bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dass genau eine Speicherkarte defekt ist.**	**2 (II)**
	D:= Genau ein Stick ist defekt. P(D) = $\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{15}$	

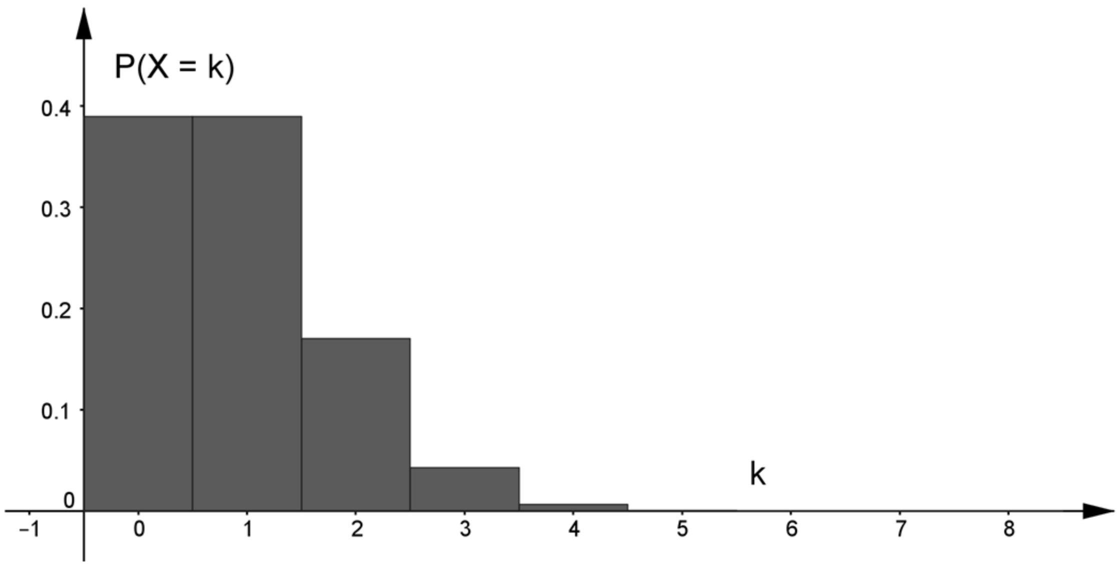
Aufgabe 7 (Stochastik)

In einem mathematischen Modell gibt p_0 die Wahrscheinlichkeit an, dass ein USB-Stick defekt ist.

In der angegebenen Graphik finden Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der binomialverteilten Zufallsvariablen.

X: Anzahl der defekten USB-Sticks für $n = 8$ und $p = p_0$.

Dabei gilt: $P(X = 0) = P(X = 1)$.



7.1 Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei USB-Sticks defekt sind, größer als 0,2 sein muss.

3 Punkte

7.2 Untersuchen Sie, ob $p_0 = 0{,}25$ gilt.

3 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

7.1	**Der Prüfling …** **… begründet, dass die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei USB-Sticks defekt sind, größer als 0,2 sein muss.**	**Punkte** **3 (II)**
	Offensichtlich zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X: $P(X = 0) + P(X = 1) < 0{,}8$. Dann gilt: $P(X \geq 2) = 1 - P(x \leq 1) > 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.	

7.2	**… untersucht, ob $\boldsymbol{p_0 = 0,25}$ …**	**3 (II)**
	Für $p_0 = 0{,}25$ würde gelten: $\mu = 8 \cdot 0{,}25 = 2$. Für das Maximum k_{Max} der Binomialverteilung ergibt sich dann: $2 - 0{,}75 \leq k_{Max} \leq 2 + 0{,}25$, also $k_{Max} = 2$. Die Graphik zeigt, dass die Binomialverteilung ihr Maximum bei $k = 0$ und $k = 1$ hat, also ist die Annahme $p_0 = 0{,}25$ falsch.	

Analytische Geometrie

Aufgabe 8 (Analytische Geometrie)

Für eine Computeranimation werden die Flugbahnen von Flugzeugen als Geraden modelliert.

Die Flugzeuge werden als punktförmige Objekte angesehen. Sie fliegen mit konstanter Geschwindigkeit über einem flachen Gebiet. In diesem Gebiet liegt der Flughafen.

Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass dieses Gebiet durch die x_1-x_2-Ebene beschrieben wird.

Die Zeit t wird in Minuten ab 14:00 Uhr angegeben. Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht 1 km in der Realität.

8.1 Ein Flugzeug wird um 14:00 Uhr vom Radar im Punkt $P(18|26|15)$ und um 14:02 Uhr im Punkt $Q(22|22|13)$ erfasst.

Bestätigen Sie, dass sich die Flugbahn des Flugzeuges durch die Geradengleichung

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 18 \\ 26 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \;;\; t \epsilon \mathbb{R}$$

beschreiben lässt.

2 Punkte

8.2 Begründen Sie ohne Rechnung, dass sich das Flugzeug im Sinkflug befindet und berechnen Sie den Zeitpunkt der Landung und die Koordinaten des Landeplatzes.

4 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
8.1	**… bestätigt, dass sich die Flugbahn des Flugzeuges …**	**2 (I)**
	$g: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 18 \\ 26 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 22-18 \\ 22-26 \\ 13-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 26 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$	
8.2	**… begründet ohne Rechnung, dass sich das Flugzeug im Sinkflug befindet.** **… gibt den Zeitpunkt der Landung und die Koordinaten des Landeplatzes an.**	**1 (II)** **3 (II)**
	Da die x_3–Koordinate negativ ist, befindet sich das Flugzeug im Sinkflug. Um Koordinaten des Landepunktes L zu bestimmen, müssen wir den Schnittpunkt der Geradengleichung mit der x_1-x_2-Ebene bestimmen.	

	Dazu wird der Richtungsvektor der Geradengleichung „an die Zeit angepasst“. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 18 \\ 26 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$ Mit $x_3 = 0$ ergibt sich: $15 + t \cdot (-1) = 0 \iff t = 15$. Damit ergibt sich für die Koordinaten des Landepunktes $L(48 \mid -4 \mid 0)$. Die Landung erfolgt nach genau 15 Minuten.	

Lineare Algebra

Aufgabe 9 (Lineare Algebra)

Geheime Informationen können auch mit Hilfe der Matrizenrechnung verschlüsselt werden.

Das Alphabet sei wie folgt geschlüsselt:

A 1	B 2	C 3	D 4	E 5	F 6	G 7	H 8	I 9	J 10	K 11	L 12	M 13
N 14	O 15	P 16	Q 17	R 18	S 19	T 20	U 21	V 22	W 23	X 24	Y 25	Z 26

Dem Leerzeichen wird gegebenenfalls die 0 zugeordnet.

Jeder Text wird dann als eine Matrix M mit 2 Zeilen und n Spalten dargestellt ($n \in \mathbb{N}$).

Das Verfahren soll am folgenden Beispiel mit dem Wort „GEHEIM“ erläutert werden:

GEHEIM: $M = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 5 & 5 & 13 \end{pmatrix}$

Bei einer ungeraden Anzahl an Ziffern, wird ein Leerzeichen „0“ ergänzt.

Die so erhaltene Matrix M wird dann von links mit einer Verschlüsselungsmatrix V multipliziert und man erhält eine codierte Matrix C mit $C = V \cdot M$.

Die Verschlüsselungsmatrix sei $V = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$.

9.1 Geben Sie die codierte Matrix C an, wenn der Text „ANNA“ verschlüsselt wird.

2 Punkte

9.2 Für die Entschlüsselungsmatrix V^{-1} gilt:

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} a & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & b \end{pmatrix} \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie a und b und

bestimmen Sie den ursprünglichen Text für die codierte Matrix $C = \begin{pmatrix} 46 \\ 82 \end{pmatrix}$.

4 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
9.1	**… gibt die codierte Matrix C an, wenn …**	**2 (II)**
	$C = V \cdot M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 14 \\ 14 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & 32 \\ 114 & 36 \end{pmatrix}$	
9.2	**… berechnet a und b.** **… bestimmt den ursprünglichen Text.**	**2 (II)** **2 (II)**
	$V^{-1} \cdot V = \begin{pmatrix} a & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $2 \cdot a - 1 = 1 \wedge -\frac{1}{4} \cdot 4 + 8 \cdot b = 1.$ Also a = 1 und $b = \frac{1}{4}$ und $V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ Damit $V^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 46 \\ 82 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$. Damit ergibt sich das Wort: „EI“.	

Zahlentheorie

Aufgabe 10 (Zahlentheorie)

Ein heute übliches Verfahren zur Ver- und Entschlüsselung von Nachrichten ist der RSA-Algorithmus. Das Zahlenpaar $P(n, e)$ ist der öffentliche Schlüssel und das Zahlenpaar $S(n, d)$ ist der geheime Schlüssel. Dabei gilt $n = p \cdot q$ mit den Primzahlen p und q.

Im Folgenden betrachten wir die beiden Primzahlen $p = 5$ und $q = 13$.

$P(65,19)$ ist ein gültiger öffentlicher Schlüssel (Nachweis ist nicht erforderlich).

Bestimmen Sie den zugehörigen geheimen Schlüssel $S(65, d)$.

6 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
10	**… bestimmt den zugehörigen geheimen Schlüssel $S(65, d)$.**	
	Es gilt: $n = 5 \cdot 13 = 65$. Für die Eulersche $\varphi -$ Funktion gilt: $\varphi(65) = \varphi(5) \cdot \varphi(13) = 4 \cdot 12 = 48$. Wir bestimmen den Entschlüsselungsexponenten d. Dabei ist d das multiplikative Inverse zu e = 19 bezüglich des Moduls $\varphi(65) = 48$.	**2 (III)**
	Mit Hilfe des erweiterten Euklidischen Algorithmus wird der ggT(19,48) = 1 als Linearkombination von 19 und 48 dargestellt. $48 = 2 \cdot 19 + 10$ $\quad$ $19 = 1 \cdot 10 + 9$ $10 = 1 \cdot 9 + 1$ $\quad$ $9 = 9 \cdot 1$ und damit: $10 = 48 - 2 \cdot 19$ $\quad$ $9 = 19 - 1 \cdot 10 = 19 - 48 + 2 \cdot 19 = 3 \cdot 19 - 1 \cdot 48$ $1 = 10 - 1 \cdot 9 = 48 - 2 \cdot 19 - 3 \cdot 19 + 1 \cdot 48 = -5 \cdot 19 + 2 \cdot 48$. -5 ist damit das multiplikative inverse Element. Wegen $-5 \equiv 43 \ (mod\ 48)$ gilt: $S(65, 43)$ ist der geheime Schlüssel.	**4 (III)**

Aufgabe 11 (Zahlentheorie)

Sei $\mathrm{n} \in \{1,\ 2,\ 3, \ldots 25\}$

Betrachtet wird die Verschlüsselung C_n mit: $C_n(x) \equiv n\ \cdot x$ (mod 26) mit $x \in \mathbb{N}$ und $0\ \leq x \leq 25$ und $0\ \leq C_n(x) \leq 25$.

Die Buchstaben des Alphabets werden der Reihe nach mit den Ziffern 0, 1, 2, …, 25 identifiziert, also:

A	B	C	D			Y	Z
0	1	2	3			24	25

Es wird jeweils buchstabenweise verschlüsselt.

11.1 Geben Sie bei der Verschlüsselung C_7 die Kodierung des Buchstabens „K“ als Buchstaben an.

2 Punkte

11.2 Bestimmen Sie alle zulässigen Verschlüsselungen C_n.

4 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

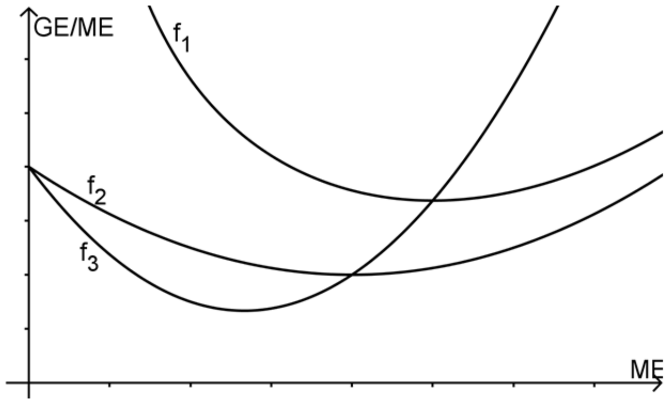
	Der Prüfling …	**Punkte**
11.1	**… gibt die Verschlüsselung des Buchstabens „K“ an.**	**2 (II)**
	Zu bestimmen ist: $C_7(10)\ (mod\ 26) \equiv 70\ (mod\ 26) \equiv 18\ (mod\ 26)$. Der Buchstabe „K“ wird mit dem Buchstaben „S“ verschlüsselt.	
11.2	**… bestimmt alle zulässigen Verschlüsselungen C_n.**	**4 (II)**
	Zu bestimmen sind alle $\mathrm{n} \in \{1,\ 2,\ 3, \ldots 25\}$ mit ggT(n, 26) = 1. Ohne die triviale Verschlüsselung n = 1 erhalten wir so 11 Möglichkeiten. Also: $n\ \in \{3; 5; 7; 9; 11; 15; 17; 19; 21; 23; 25\}$	

Beispielaufgaben für den Weiteren Leistungskurs Mathematik (Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung)

Analysis

Aufgabe 1 (Analysis)

Zur ertragsgesetzlichen Kostenfunktion
$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$,
$a, c, d > 0,\ b < 0,\ \ x$ in ME, $K(x)$ in GE,
sind in der nebenstehenden Abbildung die Graphen der Grenzkostenfunktion, der Stückkostenfunktion und der variablen Stückkostenfunktion dargestellt.



1.1 Ordnen Sie dem jeweiligen Graphen die entsprechende ökonomische Funktion begründet zu.

3 Punkte

1.2 Beweisen Sie, dass die betriebsminimale Ausbringungsmenge bei $\mathrm{x} = -\frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}}$ liegt.

3 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

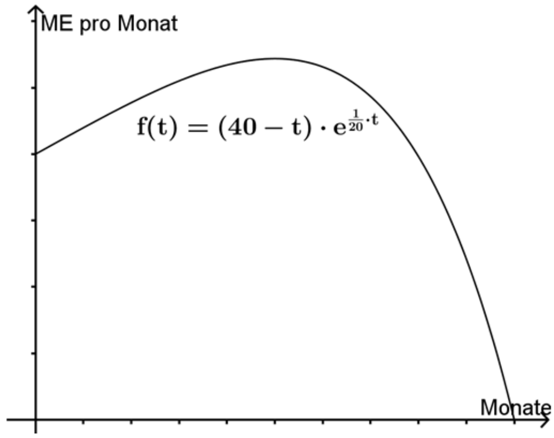
	Der Prüfling …	**Punkte**
1.1	**… ordnet dem jeweiligen Graphen die entsprechende Funktion begründet zu.**	**3 (II)**
	Der Graph der Grenzkostenfunktion schneidet den Graphen der variablen Stückkostenfunktion im Betriebsminimum, den der Stückkostenfunktion im Betriebsoptimum. Also gehört f_3 zur Grenzkostenfunktion. Die kurzfristige Preisuntergrenze ist geringer als die langfristige Preisuntergrenze, so dass f_2 der variablen Stückkostenfunktion und f_1 der Stückkostenfunktion zugeordnet werden kann.	
1.2	**… beweist, dass die betriebsminimale Ausbringungsmenge bei $x = -\frac{b}{2a}$ liegt.**	**3 (III)**
	Minimum der variablen Stückkosten: $k_v(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \qquad k_v'(x) = 2a \cdot x + b$ mit $a > 0$ Notwendig und hinreichend bei Ertragsgesetz: $k_v'(x) = 0 \iff 2a \cdot x + b = 0 \iff x = -\frac{b}{2a}$ da $a > 0$.	

Aufgabe 2 (Analysis)

Die monatlichen Absatzzahlen eines Produkts werden mit

$$f(t) = (40 - t) \cdot e^{0,05t}$$

(t in Monaten, $f(t)$ in ME/Monat) modelliert. Der nebenstehende Graph verdeutlicht die Situation.



2.1 Berechnen Sie den Zeitpunkt, bis zu dem das Produkt auf dem Markt abgesetzt werden kann.

2 Punkte

2.2 Zeigen Sie, dass der Zeitpunkt des maximalen monatlichen Absatzes bei $t = 20$ liegt.

($f''(t) = -\frac{1}{400} t \cdot e^{0,05t}$ kann verwendet werden.)

4 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

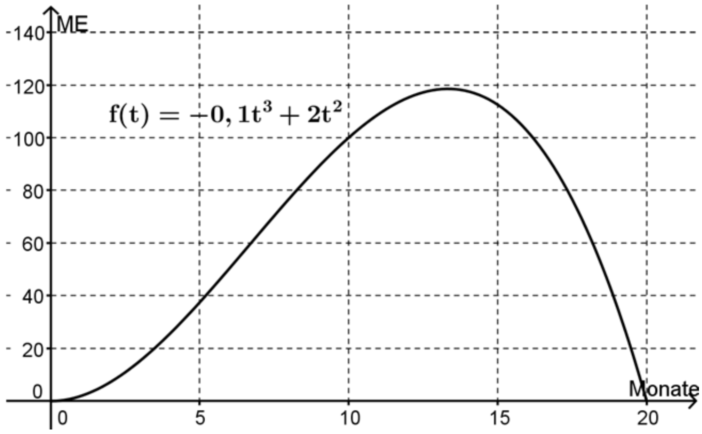
	Der Prüfling …	**Punkte**
2.1	**… berechnet den Zeitraum, bis zu dem das Produkt auf dem Markt abgesetzt wird.**	**2 (I)**
	Nullstellenbetrachtung $(40 - t) \cdot e^{0,05t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 40$ da $e^{0,05t} \neq 0$ für alle $t \in IR$. Nach 40 Monaten verschwindet das Produkt vom Markt.	
2.2	**… zeigt, dass der Zeitpunkt des maximalen monatlichen Absatzes bei $t = 20$ liegt.**	**4 (II)**
	Extremwertbetrachtung: Notwendige Bedingung $f'(t) = 0$: $f'(t) = -e^{0,05t} + (40 - t) \cdot 0,05 \cdot e^{0,05t} = 0$ (Produkt- und Kettenregel) $\Leftrightarrow -1 + (40 - t) \cdot 0,05 = 0 \Leftrightarrow -1 + 2 - 0,05t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{0,05} = 20$ Dazu hinreichend für Maximum $f''(t) < 0$: $f''(20) = -\frac{1}{400} 20 \cdot e^{0,05 \cdot 20} = \frac{-e}{20} < 0$	

Aufgabe 3 (Analysis)

Die monatlichen Absatzzahlen eines neuartigen Produkts werden mit

$$f(t) = -\frac{1}{10}t^3 + 2t^2$$

(t in Monaten, $f(t)$ in ME/Monat) modelliert. Der nebenstehende Graph verdeutlicht die Situation.

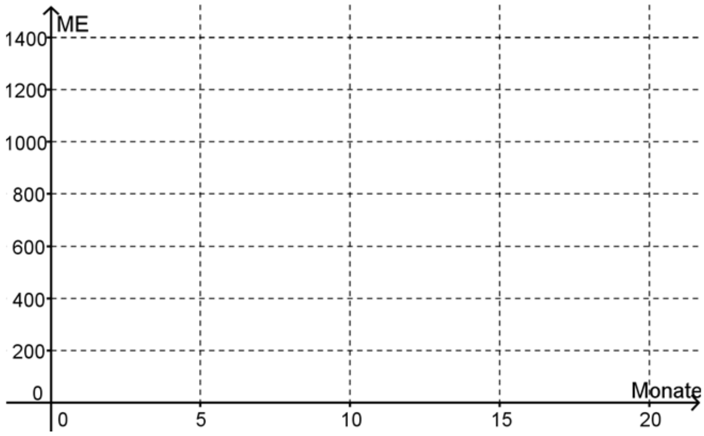


3.1 Bestimmen Sie die in den ersten 20 Monaten insgesamt abgesetzte Menge.

3 Punkte

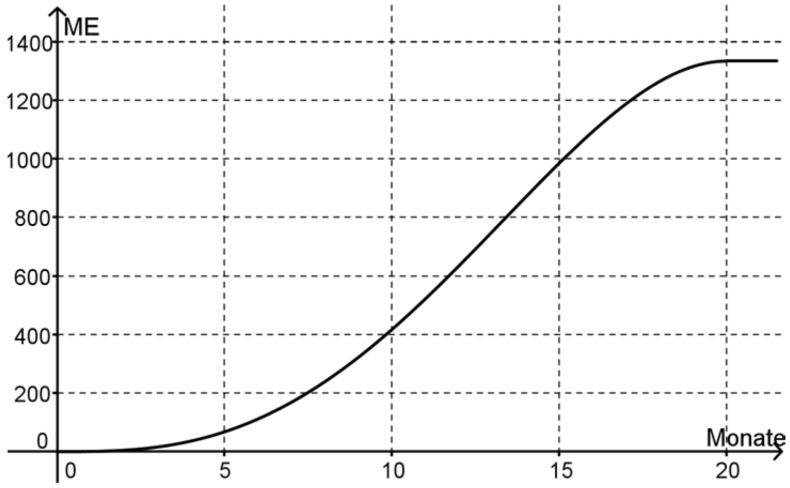
3.2 Skizzieren Sie in das nebenstehende Koordinatensystem den Graphen der Funktion, die den Gesamtabsatz in Abhängigkeit von der Zeit angibt.

3 Punkte



Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
3.1	**… bestimmt die in den ersten 20 Monaten insgesamt abgesetzte Gesamtmenge.**	**3 (II)**
	Die gesamte Absatzmenge der ersten 20 Monate wird mit dem Integral berechnet. $\int_0^{20}(-\frac{1}{10}t^3 + 2t^2)\,dt = \left[-\frac{1}{40}t^4 + \frac{2}{3}t^3\right]_0^{20} = -\frac{20^4}{40} + \frac{2}{3}\cdot 20^3 = -4000 + \frac{16000}{3} \approx 1333{,}33$ (ME)	

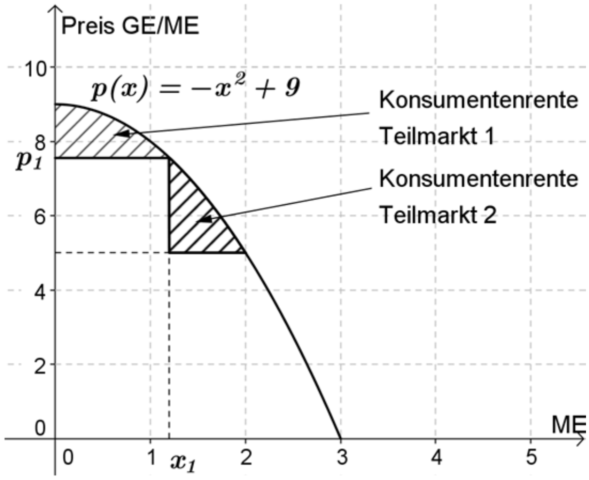
3.2	**… skizziert den Graphen der Funktion, die den Gesamtabsatz in Abhängigkeit von der Zeit angibt.**	**3 (III)**
		

Aufgabe 4 (Analysis)

Die Preisentwicklung eines Produkts entspricht der Nachfragefunktion p mit

$$p(x) = -x^2 + 9$$

x in ME, $p(x)$ in GE/ME.
Das Produkt wird auf dem Teilmarkt 1 für p_1 GE/ME und auf dem Teilmarkt 2 für 5 GE/ME verkauft. Es werden insgesamt 2 ME abgesetzt (vgl. nebenstehende Abbildung).



4.1 Beschreiben Sie den Einfluss der Höhe des Preises p_1 auf die Konsumentenrente des jeweiligen Teilmarkts.

2 Punkte

4.2 Weisen Sie nach, dass die gesamte Konsumentenrente optimal abgeschöpft wird, wenn $x_1 = \sqrt{\frac{4}{3}}$ (ME) ist.

4 Punkte

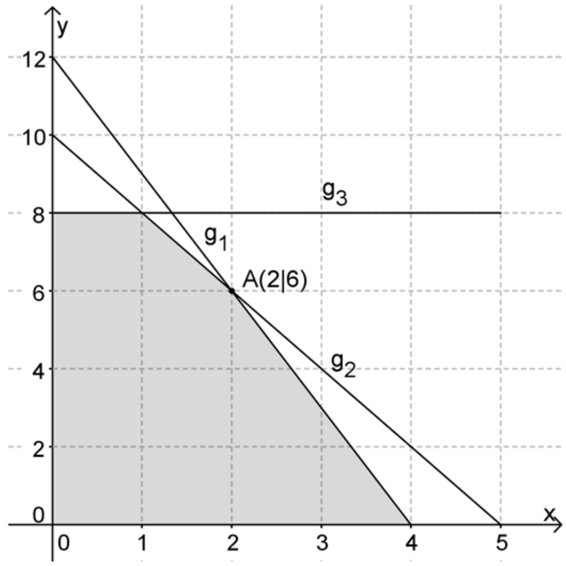
Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
4.1	**… beschreibt den Einfluss der Höhe des Preises p_1 auf die Konsumentenrente …**	**2 (II)**
	Bei Erhöhung des Preises p_1 wird die Konsumentenrente im Teilmarkt 1 geringer und gleichzeitig die des Teilmarkts 2 höher. Bei Verringerung des Preises verhält es sich umgekehrt. (Bei einem Preis p_1 von 9 GE/ME erlischt der Teilmarkt 1, bei einem Preis p_1 von 5 GE/ME erlischt der Teilmarkt 2.)	
4.2	**… weist nach, dass für x_1 die Konsumentenrente optimal abgeschöpft wird.**	**4 (III)**
	Damit die Konsumentenrente höchstmöglich abgeschöpft wird, muss der Preis p_1 so gewählt werden, dass der Flächeninhalt des Rechtecks unter dem Flächenstück zur Konsumentenrente Teilmarkt 1 möglichst groß wird. $A(x) = x \cdot f(x) - 5 \cdot x = -x^3 + 9x - 5x = -x^3 + 4x$ Extremwertbetrachtung: $A'(x) = -3x^2 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{\frac{4}{3}} \;\vee\; x = -\sqrt{\frac{4}{3}} \;\notin ID_{ök}$ Dazu hinreichend: $A''\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -6 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} < 0$	

Lineare Algebra

Aufgabe 5 (Lineare Algebra)

Das nebenstehende Schaubild zeigt die graphische Lösung (Lösungspolygon) eines Ungleichungssystems, mit dem der Gewinn optimiert werden soll. Mit dem Produkt zu y werden 100 GE Gewinn gemacht.



5.1 Die Nichtnegativitätsbedingungen gelten. Geben Sie die drei Ungleichungen an, die das Lösungspolygon festlegen.

3 Punkte

5.2 Ermitteln Sie eine mögliche Zielfunktion G, so dass es genau eine maximale Lösung in $A(2|6)$ gibt, und den zu G gehörigen maximalen Gewinn.

3 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
5.1	**… gibt die drei Ungleichungen an, die zum Lösungspolygon passen.**	**3 (II)**
	$g_1\colon\ y = -\frac{12}{4}x + 12 \quad \Rightarrow \quad 3x + y \le 12$ $g_2\colon\ y = -\frac{10}{5}x + 10 \quad \Rightarrow \quad 2x + y \le 10$ $g_3\colon\ y = 8 \quad \Rightarrow \quad y \le 8$	
5.2	**… ermittelt eine Zielfunktion, so dass es genau eine maximale Lösung in $\mathbf{A}$ gibt, und den zu $\mathbf{G}$ gehörigen maximalen Gewinn.**	**3 (III)**
	Die Gerade der Zielfunktion muss zwischen g_1 und g_2 verlaufen, also $-3 < m < -2$. Mögliche Zielfunktion: $y = -2{,}5x + b$ Berechnung b: $6 = -2{,}5 \cdot 2 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = 11$ Maximaler Gewinn: $y = -2{,}5x + \frac{G}{100} \quad \Rightarrow \quad G = 1100$ (GE)	

Aufgabe 6 (Lineare Algebra)

Die nebenstehende Tabelle gibt die Materialverflechtung in einem zweistufigen Produktionsprozess an, in dem aus Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 zunächst Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 und anschließend Endprodukte E_1 und E_2 entstehen.

			E_1	E_2
		Z_1	4	$\boldsymbol{b}$
	Z_1	Z_2	1	3
R_1	1	0	4	2
R_2	3	1	$\boldsymbol{c}$	9
R_3	2	$\boldsymbol{a}$	12	16

6.1 Zeichnen Sie das Verflechtungsdiagramm der ersten und zweiten Stufe.

3 Punkte

6.2 Ermitteln Sie die fehlenden Werte für a, b und c.

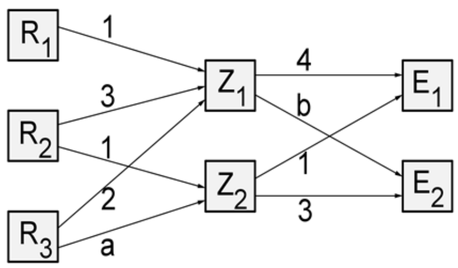
3 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

<table>
<tr><td>

6.1</td><td>Der Prüfling …

… zeichnet das Verflechtungsdiagramm der ersten und zweiten Stufe.</td><td>Punkte

3 (I)</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>6.2</td><td>… ermittelt die Werte für a, b und c.</td><td>3 (II)</td></tr>
<tr><td></td><td>Aus der Matrizengleichung
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & b \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & b \\ 13 & 3b+3 \\ 8+a & 2b+3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ c & 9 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$
folgt $a = 4,\ b = 2,\ c = 13.$</td><td></td></tr>
</table>

Aufgabe 7 (Lineare Algebra)

In einem Wirtschaftssystem sind drei Sektoren nach dem Leontief-Modell miteinander verbunden. Der Güterfluss in Mengeneinheiten wird durch die Technologiematrix

$$T = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

beschrieben.

Die dazugehörige Leontief-Inverse lautet

$$(E-T)^{-1} = \frac{1}{36} \cdot \begin{pmatrix} 60 & a & 20 \\ 30 & 50 & 10 \\ 45 & 15 & 75 \end{pmatrix}$$

7.1 Bestimmen Sie den Wert für a.

3 Punkte

7.2 Ermitteln Sie die Abgabe an den Markt, wenn die Gesamtproduktion in Mengeneinheiten $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$ beträgt.

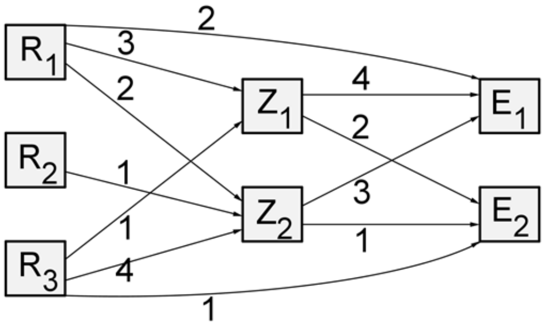
3 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
7.1	**… bestimmt den Wert für a.**	**3 (II)**
	$(E-T) = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$. Aus $(E-T)\cdot(E-T)^{-1} = E$ ergibt sich: $0{,}8 \cdot a - 0{,}1 \cdot 50 - 0{,}2 \cdot 15 = 0{,}8 \cdot a - 5 - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 10$	
7.2	**… ermittelt die Abgabe an den Markt bei gegebener Gesamtproduktion $\vec{x}$.**	**3 (II)**
	$\vec{y} = \vec{x} - T \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$	

Aufgabe 8 (Lineare Algebra)

Bei einem zweistufigen Produktionsprozess wird der Bedarf je Mengeneinheit an Roh- und Zwischenprodukten für die Endprodukte in dem folgenden Verflechtungsdiagramm verdeutlicht. Die Kosten für je eine Mengeneinheiten der Rohstoffe entsprechen dem Zeilenvektor $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.



8.1 Zeigen Sie, dass für die Rohstoff-Endprodukt-Matrix gilt: $A_{RE} = \begin{pmatrix} 20 & 8 \\ 3 & 1 \\ 16 & 7 \end{pmatrix}$

3 Punkte

8.2 Nehmen Sie Stellung zu der Behauptung, dass die Rohstoffkosten für 10 ME von E_1 über 1000 GE betragen.

3 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
8.1	**… zeigt, dass A_{RE} die Rohstoff-Endprodukt-Matrix ist.**	**3 (III)**
	$\mathrm{A_{RE}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 8 \\ 3 & 1 \\ 16 & 7 \end{pmatrix}$	
8.2	**… nimmt Stellung zu der Behauptung, dass die Rohstoffkosten für 10 ME von E_1 über 1000 GE betragen.**	**3 (II)**
	Bestimmung der Rohstoffkosten für 1 ME von E_1: $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 3 \\ 16 \end{pmatrix} = 103$ (GE) Die Behauptung stimmt, da die Rohstoffkosten für ein E_1 103 GE betragen.	

Stochastik

Aufgabe 9 (Stochastik)

Bei der Produktion eines Elektrobauteils kommt es bei durchschnittlich 20 % der Bauteile zu statischen Aufladungen, die Probleme beim weiteren Verarbeitungsprozess bewirken können. X ist die binomialverteilte Zufallsgröße, die die Anzahl problematischer Elektrobauteile bei einer Tagesproduktion von 50 Bauteilen angibt.

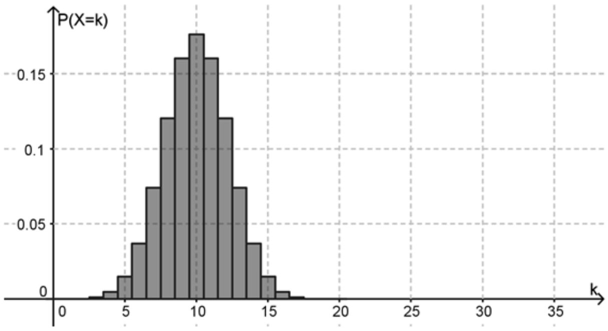


Abb. 1

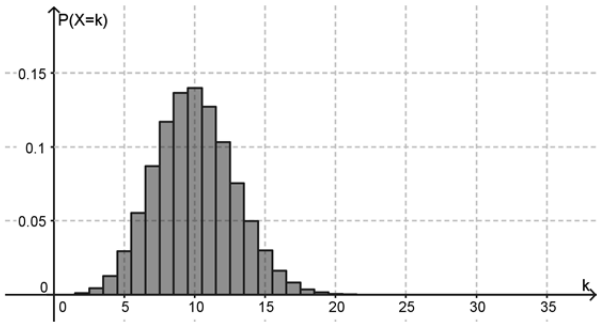


Abb. 2

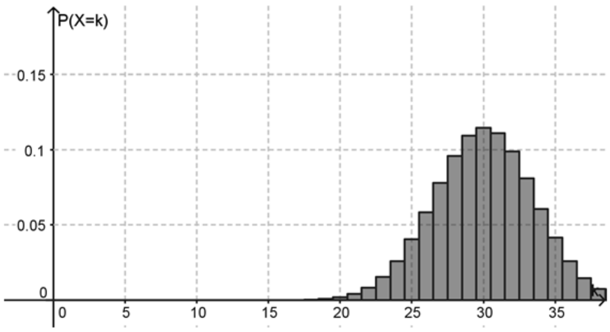


Abb. 3

9.1 Prüfen Sie, welche der obigen Abbildungen die zu X gehörige Verteilung ist.

2 Punkte

9.2 Bestimmen Sie mit der von Ihnen ausgewählten Graphik näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl statisch aufgeladener Elektroteile um weniger als zwei vom Erwartungswert $E(X)$ abweicht.

4 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
9.1	**… prüft, welche der Abbildungen die zu X gehörige Verteilung ist.**	**2 (III)**
	Da $E(X) = n \cdot p = 10$ ganzzahlig ist, muss der maximale Wert $P(X = 10)$ sein. Abbildung 3 erfüllt dies nicht. Nur für $p = 0{,}5$ ist die Binomialverteilung symmetrisch, so dass für $p = 0{,}2$ nur Abbildung 2 möglich ist.	

9.2	**… bestimmt näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl problematischer Elektroteile um weniger als zwei vom Erwartungswert von X abweicht.**	**4 (II)**
	Da $E(X) = n \cdot p = 10$, sind die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten von 9, 10 oder 11 statisch aufgeladenen Elektrobauteilen aufzusummieren. Aus der Abb. 2 liest man 0,14+0,14+0,13=0,41 ab, also ca. 40 % Wahrscheinlichkeit.	

Aufgabe 10 (Stochastik)

10.1 Ein Unternehmen, das Leuchtmittel an zwei Standorten A und B herstellt, prüft deren Lebensdauer. Die Zufallsgröße X gibt für ein Leuchtmittel von Standort A die Lebensdauer in Stunden an, Y die für ein Leuchtmittel aus B. Es gilt $E(X) = E(Y)$ und $\sigma(X) < \sigma(Y)$.

Erklären Sie, was diese Beziehungen für die Verteilung der Lebensdauer eines Leuchtmittels bedeuten.

3 Punkte

10.2 Die Zufallsgröße Z nimmt genau die Zahlenwerte 0, 1, 2, 3, 4 mit positiven Wahrscheinlichkeiten an.

Entwickeln Sie für Z eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, so dass der Erwartungswert von Z zwischen 0 und 1 liegt.

3 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

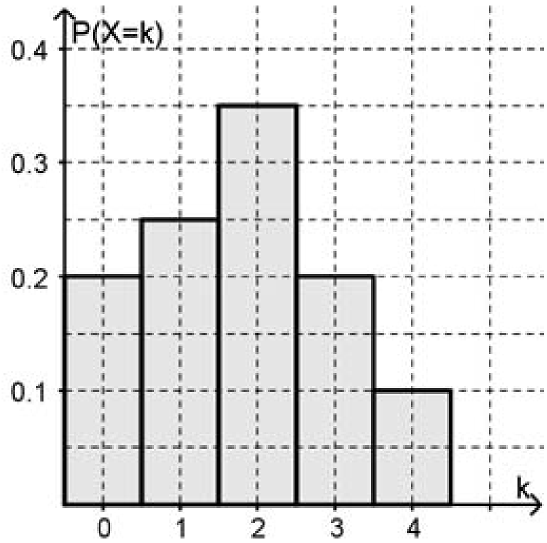
	Der Prüfling …	**Punkte**
10.1	**… erklärt, was diese Beziehungen für die Verteilung der Lebensdauer eines Leuchtmittels bedeuten.**	**3 (II)**
	Der Erwartungswert entspricht der durchschnittlich zu erwartenden Lebensdauer eines Leuchtmittels. Diese ist für die in A und B produzierten jeweils gleich. Die geringere Standardabweichung bei X bedeutet, dass die Lebensdauer eines Leuchtmittels aus A im Vergleich zu einem aus B durchschnittlich weniger weit von der erwarteten Lebensdauer abweicht.	
10.2	**… entwickelt eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, so dass der Erwartungswert zwischen 0 und 1 liegt.**	**3 (III)**
	Mögliche Wahrscheinlichkeitsverteilung:	

z_i	0	1	2	3	4	$\sum$
$P(Z = z_i)$	0,80	0,05	0,05	0,05	0,05	1

$E(Z) = 0{,}05 + 0{,}1 + 0{,}15 + 0{,}2 = 0{,}5$

Aufgabe 11 (Stochastik)

Ein Unternehmen macht mit seinem Produkt einen Gewinn zwischen 0 und 4 Geldeinheiten. Es liegen unterschiedliche Angaben zu den Gewinnwahrscheinlichkeiten vor.



11.1 Erklären Sie, warum der obige Graph nicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer ganzzahligen Zufallsgröße beschreiben kann.

2 Punkte

11.2 Die Zufallsgröße X gibt den Gewinn, den das Unternehmen mit seinem Produkt macht, an.
Die obige Graphik stellt für einen Gewinn von 0 GE, 3 GE und 4 GE die Wahrscheinlichkeiten richtig dar. Es ist bekannt, dass der erwartete Gewinn bei 1,7 GE liegt.

Ermitteln Sie die korrekten Wahrscheinlichkeiten für $X = 1$ und $X = 2$.

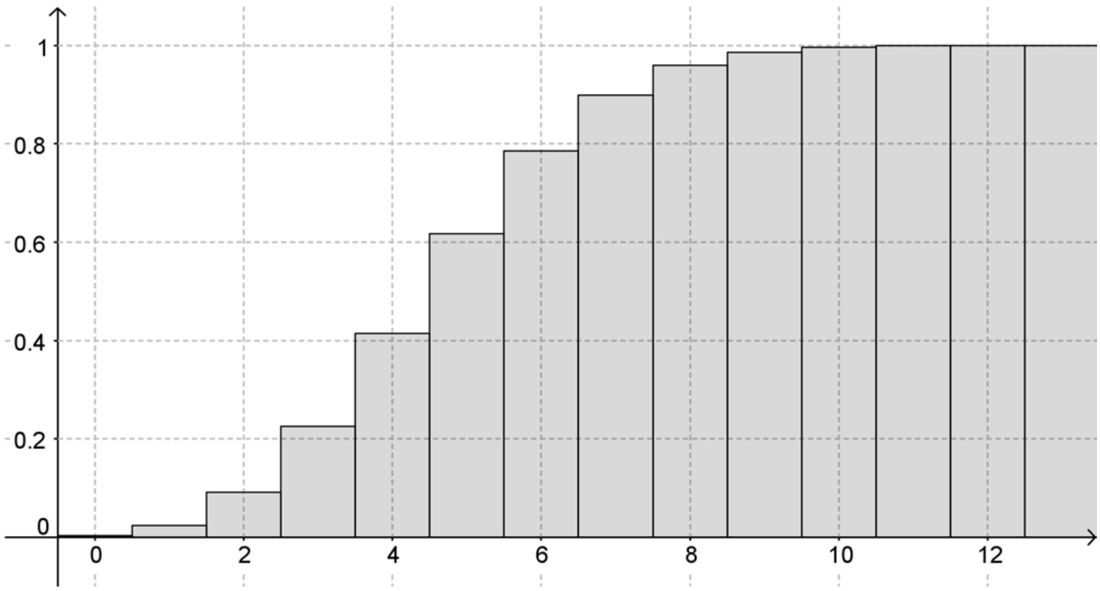
4 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
11.1	**… erklärt, warum der Graph nicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung …**	**2 (I)**
	Die Summe der Wahrscheinlichkeiten beträgt $0{,}2 + 0{,}25 + 0{,}35 + 0{,}2 + 0{,}1 = 1{,}1 > 1$.	
11.2	**… ermittelt die korrekten Wahrscheinlichkeiten für $X = 1$ und $X = 2$.**	**4 (II)**
	Mit $a = P(X = 1)$ und $b = P(X = 2)$ ergibt sich Summe Einzelwahrscheinlichkeiten: I. $0{,}2 + a + b + 0{,}2 + 0{,}1 = 1 \Leftrightarrow a + b = 0{,}5$ Erwartungswert: II. $a + 2b + 0{,}6 + 0{,}4 = 1{,}7 \Leftrightarrow a + 2b = 0{,}7$ II. – I. $b = 0{,}2 \Rightarrow a = 0{,}3$	

Aufgabe 12 (Stochastik)

25 % der Mitarbeiter/-innen eines Großunternehmens klagen über eine zu hohe Arbeitsbelastung. Das Balkendiagramm gibt die kumulierte Binomialverteilung für eine Stichprobe von $n = 20$ an.



12.1 Geben Sie allein unter Zuhilfenahme des Diagramms die ungefähren Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse an:

A: Genau 6 Mitarbeiter/-innen sind unzufrieden.

B: Weniger als 8 Mitarbeiter/-innen fühlen sich überlastet.

C: Mindestens 15 Mitarbeiter/-innen sind zufrieden.

3 Punkte

12.2 Nach Einführung eines neuen Arbeitszeitmodells beklagen nur noch 2 von 20 Personen die Arbeitsbelastung.

Beurteilen Sie mit Hilfe des Diagramms, ob mit 90 % Sicherheitswahrscheinlichkeit von einer geringeren Unzufriedenheit als 25 % ausgegangen werden kann.

3 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	Punkte
12.1	**… gibt allein unter Zuhilfenahme des Diagramms die ungefähren Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse an.**	**3 (II)**
	X gibt die Anzahl unzufriedener Mitarbeiter/-innen an. A: $P(X = 6) = P(x \leq 6) - P(X \leq 5) \approx 0{,}78 - 0{,}62 = 0{,}16$ B: $P(X < 8) \approx 0{,}9$ C: $P(X \leq 5) \approx 0{,}62$	
12.2	**… beurteilt, ob mit 90 % Sicherheitswahrscheinlichkeit von einer geringeren Unzufriedenheit als 25 % ausgegangen werden kann.**	**3 (III)**
	Da die Wahrscheinlichkeit maximal 2 unzufriedene Mitarbeiter/-innen bei $p = 0{,}25$ zu haben mit $P(X \leq 2) \approx 0{,}1$ ungefähr 10 % beträgt, kann mit 90 % Sicherheitswahrscheinlichkeit davon ausgegangen werden, dass die Zufriedenheit gesteigert wurde.	

Beispielaufgaben für den Grundkurs Mathematik (Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung)

Analysis

Aufgabe 1 (Analysis)

Die folgende Tabelle gibt die Stückkosten k, die variablen Stückkosten k_v und die Grenzkosten K' zur ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K an (x in ME; $K(x)$ in GE):

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$k(x)$	201,0	124,0	97,0	84,0	77,8	76,0	77,6	82,0
$k_v(x)$	57,0	52,0	49,0	48,0	49,0	52,0	57,0	64,0
$K'(x)$	51,0	44,0	43,0	48,0	59,0	76,0	99,0	128,0

Beurteilen Sie die Richtigkeit der folgenden Aussagen allein unter Zuhilfenahme der Tabellenwerte:

1.1 Das Betriebsminimum liegt bei 4 ME.

2 Punkte

1.2 Die Kosten steigen zwischen 0 und 4 ME degressiv.

2 Punkte

1.3 Die Fixkosten belaufen sich auf 144 GE.

2 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

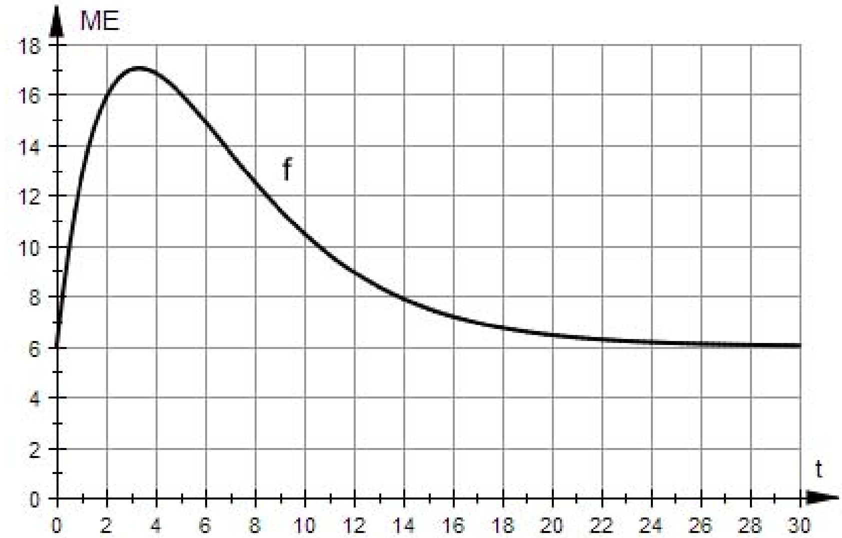
	Der Prüfling … **… beurteilt die Aussagen.**	**Punkte**
1.1	Die variablen Stückkosten und die Grenzkosten sind im Betriebsminimum gleich, also ist aus der Tabelle abzulesen: $x_{BM} = 4$. Die Aussage ist also wahr.	**2 (II)**
1.2	Die Grenzkostenfunktion K' gibt den Kostenzuwachs an. Dieser nimmt nur zwischen 0 ME und 3 ME ab (degressiver Zuwachs), danach wieder zu (progressiver Zuwachs). Daher ist die Aussage falsch.	**2 (II)**
1.3	Die Stückkostenfunktion und die variable Stückkostenfunktion unterscheiden sich nur durch den Term $\frac{K_{fix}}{x}$. Daher gilt: $K_{fix} = k(1) - k_v(1) = 201 - 57 = 144$. Die Aussage ist also wahr.	**2 (III)**

Aufgabe 2 (Analysis)

Die Absatzentwicklung eines Produktes wird durch die folgende Funktion beschrieben:

$$f(t) = 9t \cdot e^{-0.3t} + 6$$

dabei steht $t \geq 0$ für die Monate und $f(t)$ für den Absatz in ME pro Monat.



2.1 Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die monatlichen Absatzzahlen maximal werden (notwendiges Kriterium genügt).

4 Punkte

2.2 Nehmen Sie mit Hilfe des Graphen Stellung zu der folgenden Aussage:

In der zweiten Hälfte des ersten Jahres liegt der Zeitpunkt des maximalen Absatzrückganges.

2 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
2.1	**… berechnet den Zeitpunkt.**	**4 (II)**
	Notwendige Bedingung: $f'(t) = 0$ $f'(t) = (-2{,}7t + 9) \cdot e^{-0{,}3t} = 0$ (mit Produkt und Kettenregel) $\Leftrightarrow -2{,}7t + 9 = 0$, da $e^t \neq 0$ für alle t, $\Leftrightarrow t = \frac{10}{3}$ Der maximale Absatz wird im 4. Monat erreicht.	
2.2	**… nimmt Stellung zur Aussage.**	**2 (II)**
	Der stärkste Absatzrückgang entspricht dem Wendepunkt mit re/li-Krümmungswechsel. Dieser liegt laut Graph bei ungefähr (8 | 12,5). Die Aussage ist also wahr.	

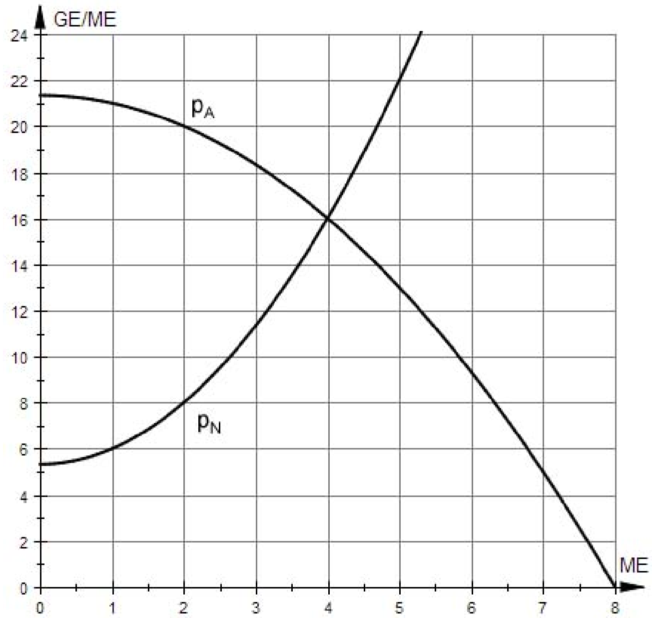
Aufgabe 3 (Analysis)

Gegeben sind folgende Angebotsfunktion p_A und Nachfragefunktion p_N:

$$p_A(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{16}{3}$$

$$p_N(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{64}{3}$$

x in ME, $p(x)$ in GE/ME



3.1 Berechnen Sie das Marktgleichgewicht.

4 Punkte

3.2 Begründen Sie anhand der Graphen, dass die Konsumentenrente geringer ist als die Produzentenrente.

2 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
3.1	**… berechnet das Marktgleichgewicht.**	**4 (II)**
	Schnittpunkt von Angebots- und Nachfragefunktion: $\frac{2}{3}x^2 + \frac{16}{3} = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{64}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^2 - 16$ liefert die Lösungen $x_{1/2} = \pm 4$. Da negative Produktionswerte ökonomisch sinnlos sind, liegt die Gleichgewichtsmenge bei 4 ME. Der Gleichgewichtspreis liegt bei $p_A(4) = p_N(4) = 16\ GE/ME$. Die Abbildung bestätigt das Ergebnis.	
3.2	**… begründet anhand der Graphen.**	**2 (III)**
	Der eingeschlossene Flächeninhalt zwischen dem Graphen von $\mathrm{p_N}$ und $\mathrm{y} = 16$ stellt den Geldwert der Konsumentenrente dar, der Flächeninhalt zwischen $\mathrm{y} = 16$ und dem Graphen von $\mathrm{p_A}$ den Geldwert der Produzentenrente. Die Fläche der Konsumentenrente ist kleiner als die Fläche der Produzentenrente, somit ist die Konsumentenrente geringer als die Produzentenrente.	

Lineare Algebra

Aufgabe 4 (Lineare Algebra)

Ein Unternehmen stellt aus drei unterschiedlichen Bauteilen B1, B2 und B3 die Endprodukte E1, E2 und E3 her. Das Unternehmen hat noch 70 ME von B1 und jeweils 60 ME von B2 und B3 auf Lager.

4.1 Die Materialverflechtung ist der Matrix M_{BE} zu entnehmen.

$$M_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie, wie viele ME der Endprodukte hergestellt werden können, wenn der Lagerbestand vollständig aufgebraucht werden soll.

4 Punkte

4.2 Durch eine Veränderung der Produktion werden nun für die Herstellung von einer ME von E3 eine zusätzliche ME von B3 benötigt. Als umgeformte erweiterte Koeffizienten-Matrix ergibt sich bei obigen Lagerbeständen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 70 \\ 0 & 2 & 6 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right)$$

Interpretieren Sie die Bedeutung dieser Matrix im Sachzusammenhang.

2 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
4.1	**… berechnet, wie viele ME der Endprodukte hergestellt werden können.**	**4 (II)**
	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 3 & 70 \\ 2 & 2 & 0 & 60 \\ 1 & 2 & 2 & 60 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 3 & 70 \\ 0 & 2 & 6 & 80 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$ liefert den Lösungsvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$ Es können 20 ME von E1 und jeweils 10 ME von E2 und E3 produziert werden.	
4.2	**… interpretiert die Bedeutung der Matrix im Sachzusammenhang.**	**2 (II)**
	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 3 & 70 \\ 0 & 2 & 6 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right)$ dieses Gleichungssystem besitzt keine Lösung, der vorliegende Lagerbestand kann also nicht vollständig zu Endprodukten verarbeitet werden.	

Aufgabe 5 (Lineare Algebra)

Ein Unternehmen stellt aus vier Rohstoffen R1, R2, R3 und R4 drei Zwischenprodukte Z1, Z2 und Z3 und aus diesen wiederum zwei Endprodukte E1 und E2 her. Die Materialverflechtung ist den unten stehenden Stücklisten zu entnehmen.

	Z1	Z2	Z3
R1	1	0	2
R2	0	2	2
R3	1	1	3
R4	2	1	0

	E1	E2
Z1	1	1
Z2	2	0
Z3	0	1

5.1 Ermitteln Sie, wie viele ME der Rohstoffe für die Produktion der jeweiligen Endprodukte benötigt werden.

3 Punkte

Das Unternehmen kalkuliert für die folgende Geschäftsperiode mit einer Nachfrage von 200 ME für E1 und 300 ME für E2 und Kosten in Höhe von 4800 GE. Aufgrund der aufwändigeren Produktion soll der Verkaufspreis für E2 doppelt so hoch sein wie der für E1.

5.2 Berechnen Sie, wie hoch die Verkaufspreise mindestens sein müssen, damit das Unternehmen kostendeckend produziert.

3 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	Punkte
5.1	**… ermittelt, wie viele ME der Rohstoffe für die Produktion der jeweiligen Endprodukte benötigt werden.**	**3 (I)**
	$C_{RE} = A_{RZ} \cdot B_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$	
5.2	**… berechnet, wie hoch die Verkaufspreise mindestens sein müssen, damit das Unternehmen kostendeckend produziert.**	**3 (II)**
	Bei Kostendeckung sind Erlös und Kosten gleich: $(x \quad 2x) \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix} = 4800$ $\Leftrightarrow\ 800x = 4800$ $\Leftrightarrow\ x = 6$ Der Verkaufspreis für E1 muss mindestens 6 GE und für E2 mindestens 12 GE betragen.	

Aufgabe 6 (Lineare Algebra)

Gegeben sind die Matrizen A und B mit $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

6.1 Begründen Sie, warum die Matrizen A und B nicht miteinander multipliziert werden können.

1 Punkt

6.2 Berechnen Sie die zu A inverse Matrix A^{-1} .

3 Punkte

6.3 Geben Sie eine 3x2-Matrix C mit c_{ij} an, so dass gilt: $c_{ij} = 1$ wenn $i > j$, $c_{ij} = i + j$ wenn $i = j$ und $c_{ij} = i \cdot j$ wenn $i < j$.

2 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
6.1	**… begründet, warum die Matrizen nicht miteinander multipliziert werden können.**	**1 (I)**
	Die Anzahl der Spalten von A (2) stimmt nicht mit der Anzahl der Zeilen von B (3) überein.	
6.2	**… berechnet die zu A inverse Matrix A^{-1} .**	**3 (II)**
	$\left(\begin{array}{cc\|cc} -2 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc\|cc} -2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc\|cc} -2 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc\|cc} 1 & 0 & -0{,}5 & 2{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 2{,}5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	
6.3	**… gibt eine 3x2-Matrix C mit c_{ij} an.**	**2 (II)**
	$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	

Stochastik

Aufgabe 7 (Stochastik)

Eine Textilfabrik stellt unter anderem weiße T-Shirts her. Von diesen werden 50 % gefärbt und 50 % bestickt. Beim Färben sind 10 % der T-Shirts nicht farbecht, 20 % der anderen Hälfte sind fehlerhaft bestickt.

7.1 Stellen Sie den Sachverhalt in einem Baumdiagramm dar.

3 Punkte

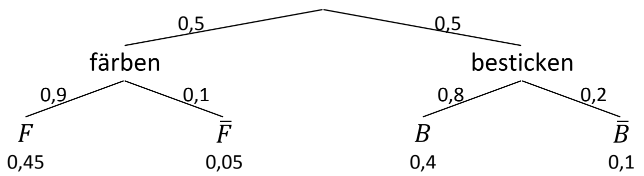
7.2 Die Herstellungskosten für alle T-Shirts betragen im Mittel 0,2 GE pro Stück.

Die korrekt gefärbten T-Shirts werden zu einem Preis von 2 GE pro Stück, die fehlerhaft gefärbten T-Shirts werden als 2. Wahl zu einem Preis von 1 GE pro Stück verkauft. Die korrekt bestickten T-Shirts erzielen einen Erlös von 2,5 GE pro Stück, wohingegen die fehlerhaft bestickten T-Shirts zusätzliche Kosten in Höhe von 1 GE pro Stück verursachen.

Berechnen Sie den durchschnittlich zu erwartenden Stückdeckungsbeitrag.

3 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
7.1	**… stellt den Sachverhalt in einem Baumdiagramm dar.**	**3 (I)**
	 F = Färbung ok, $\bar{F}$ = Färbung fehlerhaft, B = korrekt bestickt, $\bar{B}$ = fehlerhaft bestickt	
7.2	**… berechnet den durchschnittlich zu erwartenden Stückdeckungsbeitrag.**	**3 (II)**
	Sei X die Zufallsgröße, die den Stückdeckungsbeitrag beschreibt. $E(X) = 2 \cdot 0{,}45 + 1 \cdot 0{,}05 + 2{,}5 \cdot 0{,}4 - 1 \cdot 0{,}1 - 0{,}2 = 1{,}65$ Der zu erwartende Stückdeckungsbeitrag beträgt 1,65 GE.	

Aufgabe 8 (Stochastik)

Bei der Herstellung eines Produktes sind durchschnittlich 20 % der Teile fehlerhaft. Zu Testzwecken werden der laufenden Produktion einige Teile entnommen.

8.1 Es sei X die Zufallsvariable, die die Anzahl der entnommenen Teile angibt, die fehlerhaft sind. Begründen Sie, warum man die Zufallsvariable X als binomialverteilt annehmen kann.

3 Punkte

8.2 Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die ersten beiden entnommenen Teile nicht fehlerhaft sind.

1 Punkt

8.3 Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis A und ein Ereignis B an, so dass gilt:

$$P(A) = 0{,}2^{10} \qquad P(B) = \binom{50}{40} \cdot 0{,}2^{10} \cdot 0{,}8^{40}$$

2 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
8.1	**… begründet, warum man die Zufallsvariable als binomialverteilt annehmen kann.**	**3 (I)**
	Für jedes Teil gibt es nur zwei Möglichkeiten, nämlich entweder defekt oder nicht defekt. Es wird zwar ohne Zurücklegen gezogen, aber da die Grundgesamtheit sehr groß und die Stichprobe verhältnismäßig klein ist, bleibt die Wahrscheinlichkeit bei jedem Zug gleich.	
8.2	**… berechnet die Wahrscheinlichkeit.**	**1 (I)**
	$P(E) = 0{,}8^2 = 0{,}64$	
8.3	**… gibt die Ereignisse an.**	**2 (II)**
	A = die ersten zehn Teile sind fehlerhaft. B = es werden 50 Teile gezogen, davon sind genau 10 fehlerhaft.	

Aufgabe 9 (Stochastik)

Von den 100 Schülerinnen und Schülern einer Jahrgangsstufe wählt die eine Hälfte als Naturwissenschaft Physik, die andere Hälfte Biologie. Die Jahrgangsstufe umfasst insgesamt 60 Mädchen. 30 % sind Jungen und haben Physik gewählt.

9.1 Stellen Sie den gegebenen Sachverhalt in einer Vierfeldertafel dar.

3 Punkte

9.2 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten,

- dass eine zufällig ausgewählte Schülerin Physik gewählt hat,
- dass ein zufällig ausgewählter Teilnehmer des Biologie-Kurses männlich ist.

3 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
9.1	**… stellt die Daten in einer Vierfeldertafel dar.**	**3 (I)**
	Es ergibt sich die Vierfeldertafel: | | weiblich | männlich | | | Physik | 0,2 | 0,3 | 0,5 | | Biologie | 0,4 | 0,1 | 0,5 | | | 0,6 | 0,4 | 1 |	
9.2	**… ermittelt die Wahrscheinlichkeiten …**	**3 (II)**
	Mit dem Satz von Bayes ergibt sich: $P_w(Ph) = \frac{P(Ph \cap w)}{P(w)} = \frac{0{,}2}{0{,}6} = \frac{1}{3} = 0,\overline{3}$ $P_{Bio}(m) = \frac{P(m \cap Bio)}{P(Bio)} = \frac{0{,}1}{0{,}5} = \frac{1}{5} = 0{,}2$ Alternativ können die gesuchten Wahrscheinlichkeiten aus einem Baumdiagramm entnommen werden.	

Vierfeldertafel (aus 9.1):

	weiblich	männlich	
Physik	0,2	0,3	0,5
Biologie	0,4	0,1	0,5
	0,6	0,4	1

Beispielaufgaben für den Grundkurs Mathematik (Fachbereich Gestaltung)

Analysis

Aufgabe 1 (Analysis)

Das Unternehmen RELAX stellt Liegestühle her. Das Logo soll aus einem stilisierten Liegestuhl bestehen. Zur Digitalisierung soll eine ganzrationale Funktion dritten Grades die Kontur der Sitzfläche beschreiben.

Bild 1

Der Graph dieser ganzrationalen Funktion f dritten Grades hat folgende Eigenschaften:
- er schneidet die y-Achse bei $y_s = 45$,
- er schneidet die x-Achse bei $x_0 = 90$,
- er hat im Punkt $T(\,30 \mid 20\,)$ einen lokalen Tiefpunkt,
- er hat im Punkt $H(\,60 \mid 25\,)$ einen lokalen Hochpunkt.

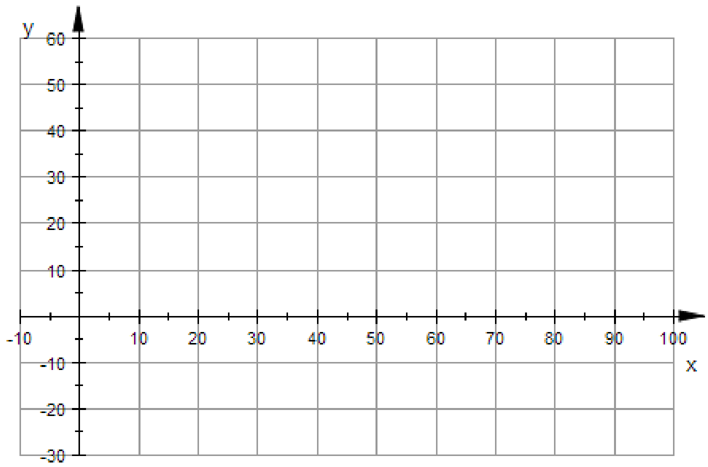
1.1 Skizzieren Sie einen möglichen Verlauf des Funktionsgraphen von f in dem beiliegenden Koordinatensystem.

3 Punkte

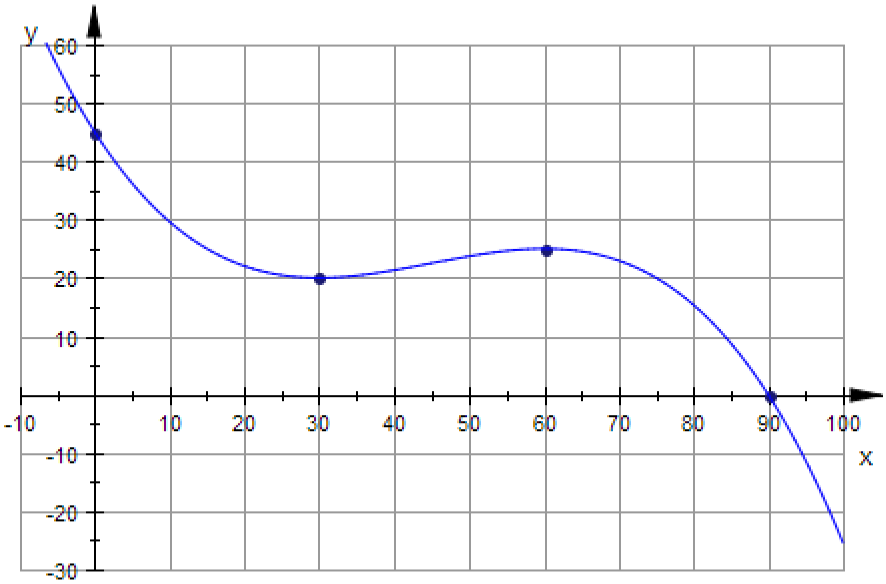
1.2 Bei Wahl des Ansatzes $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ entsteht aus den aufgeführten Bedingungen ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten a, b, c, d. Beurteilen Sie dieses Gleichungssystem hinsichtlich seiner Lösbarkeit.
Hinweis: Eine Lösung des Gleichungssystems ist nicht gefordert.

3 Punkte

Anlage: Koordinatensystem zu Aufgabe 1.1



Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	Punkte
1.1	**… skizziert den Verlauf des Funktionsgraphen.**	**3 (I)**
	Einzeichnen der Punkte und Skizzierung des Verlaufs liefert: 	
1.2	**… beurteilt die Bedingungen hinsichtlich der Lösbarkeit.**	**3 (III)**
	Zur Berechnung von vier Koeffizienten braucht man vier voneinander unabhängige Gleichungen. Aus den obigen Bedingungen lassen sich aber sechs Gleichungen aufstellen. Wenn die Gleichungen in sich widersprüchlich sind, gibt es keine Lösung und damit keine Funktion dritten Grades, die die Anforderungen erfüllt. Dann muss zur Lösbarkeit auf Bedingungen verzichtet werden.	

Aufgabe 2 (Analysis)

Eine quadratische Werbefläche ABCD der Firma RELAX mit den Eckpunkten $A(\,0 \mid 0\,)$, $B(\,2 \mid 0\,)$, C, D wird durch die Funktion $f(x) = 0{,}5\,x^2$ in zwei Teilflächen zerlegt.

2.1 Stellen Sie den Sachverhalt in einem geeigneten Koordinatensystem graphisch dar.

Geben Sie die Koordinaten von C und D an.

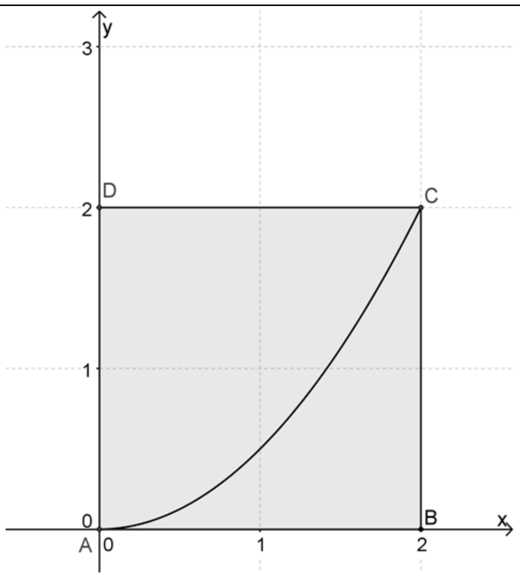
3 Punkte

2.2 Die größere Teilfläche soll gelb, die kleinere rot gefärbt werden.

Berechnen Sie das Verhältnis der Teilflächen.

3 Punkte

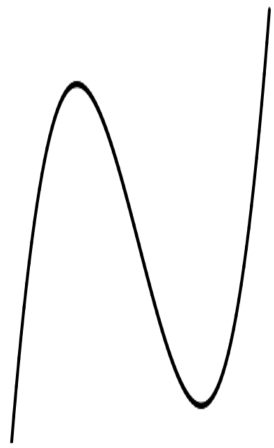
Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
2.1	**… stellt den Sachverhalt dar.** **… gibt die Koordinaten an.**	**2 (I)** **1 (I)**
	 Angabe der Punkte: C(2|2) und D(0|2)	
2.2	**… berechnet das Verhältnis der Teilflächen.**	**3 (II)**
	$\int_0^2 0{,}5x^2\,dx = \left[\frac{1}{6}\,x^3\right]_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ Rote Fläche: $\frac{4}{3}$ Gelbe Fläche: $4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$ Verhältnis: 1 : 2	

Aufgabe 3 (Analysis)

Das Unternehmen NORA hat sich für ein Logo in der Form des Funktionsgraphen

$$f(x) = 0{,}25\,x^3 + 0{,}5x^2 - 2{,}75x - 3 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$



entschieden. Der Designer behauptet, dass die äußeren Nullstellen der Funktion beide gleich weit von der mittleren Nullstelle $(\,-1 \mid 0\,)$ entfernt liegen.

Nehmen Sie Stellung zu der Aussage des Designers.

6 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

3	**Der Prüfling …** **… nimmt Stellung zur Aussage des Designers.**	**Punkte**
	Da x = -1 eine Nullstelle der Funktion ist ergibt sich durch Polynomdivision: $(0{,}25\,x^3 + 0{,}5x^2 - 2{,}75x - 3) : (x+1) = 0{,}25\,x^2 + 0{,}25x - 3$ Und mit der p-q-Formel: $0{,}25\,x^2 + 0{,}25x - 3 = 0 \iff x^2 + x - 12 = 0 \iff x = -4 \vee x = 3$	**4 (II)**
	Der Designer hat mit seiner Behauptung Unrecht, weil zwischen -4 und -1 weniger Abstand ist als zwischen -1 und 3. [$(-1) - (-4) = 3$ und $3 - (-1) = 4$]	**2 (II)**

Analytische Geometrie

Aufgabe 4 (Analytische Geometrie)

In einem Verkaufsraum soll eine Ecke mit einem dreieckigen Tuch abgespannt werden.

Die Punkte $A(4 \mid 0 \mid 0)$, $B(0 \mid 2 \mid 0)$ und $C(0 \mid 0 \mid 3)$ sind die Befestigungspunkte für das Tuch.

4.1 Stellen Sie das Tuch in einem Koordinatensystem dar.

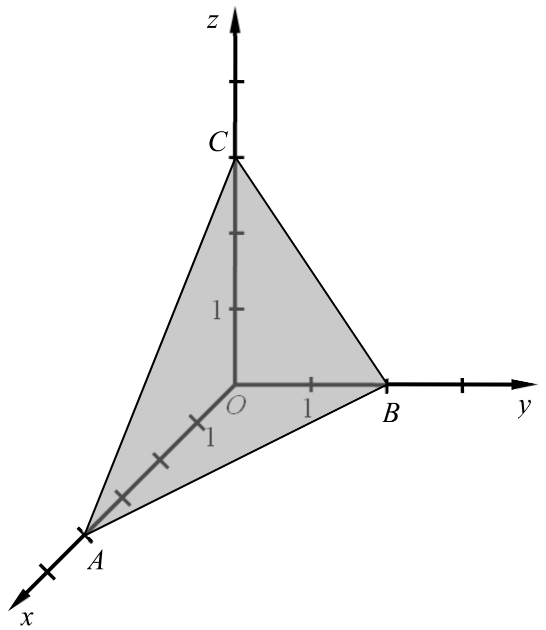
2 Punkte

4.2 Für weitere Berechnungen benötigt man eine mathematische Gleichung für die Ebene, die durch das Tuch gebildet wird.

Berechnen Sie eine Gleichung der Ebene in Koordinatenform.

4 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
4.1	**… stellt das Tuch in einem Koordinatensystem dar.**	**2 (I)**
		

4.2	**… berechnet eine Gleichung für die Ebene in Koordinatenform.**	**4 (II)**
	$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ Das Kreuzprodukt liefert $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor der Ebene $\rightarrow E: 3x + 6y + 4z = 12$, da $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 12$	

Aufgabe 5 (Analytische Geometrie)

Die Flugbahnen zweier Flugzeuge A und B sind gegeben durch die Gleichungen

$$g_A: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -200 \\ -700 \\ 1300 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ -30 \end{pmatrix} \qquad g_B: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 220 \\ -160 \\ 1000 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 30 \\ -30 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Die Komponenten der Vektoren stehen für Maßzahlen von Streckenlängen in m bzw. von Geschwindigkeiten in m/s.

Die Parameter t und r stehen für Maßzahlen von Zeiten in Sekunden seit Beginn der Beobachtung.

5.1 Zeigen Sie, dass sich die Flugbahnen von A und B schneiden.

3 Punkte

5.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes.

2 Punkte

5.3 Untersuchen Sie, ob die Flugzeuge A und B in diesem Punkt kollidieren würden.

1 Punkt

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

5.1	**Der Prüfling …** **… zeigt, dass sich die Flugbahnen von A und B schneiden.**	**Punkte** **3 (II)**
	$g_A = g_B$ $\begin{pmatrix} -200 \\ -700 \\ 1300 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 220 \\ -160 \\ 1000 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 30 \\ -30 \\ 30 \end{pmatrix}$ $60t - 30r = 420$ $60t + 30r = 540$ $-30t - 30r = -300$ $120t = 960$ $60t + 30r = 540$ $-60t - 60r = -600$ $120t = 960$ $-30r = -60$ Für $t = 8 \ \wedge \ r = 2$ eindeutig lösbar, da $60 \cdot 8 - 30 \cdot 2 = 420$ $60 \cdot 8 + 30 \cdot 2 = 540$ $-30 \cdot 8 - 30 \cdot 2 = -300$	

5.2	**… berechnet die Koordinaten des Schnittpunktes.**	**2 (I)**
	$\begin{pmatrix} -200 \\ -700 \\ 1300 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 280 \\ -220 \\ 1060 \end{pmatrix}$ der Schnittpunkt hat die Koordinaten S(280|-220|1060)	
5.3	**… untersucht, ob die Flugzeuge A und B in diesem Punkt kollidieren.**	**1 (II)**
	Da *t* = 8 und *r* = 2 ist, sind die Flugzeuge zu unterschiedlichen Zeitpunkten an dem Schnittpunkt und kollidieren deshalb nicht.	

Aufgabe 6 (Analytische Geometrie)

Das Kunstwerk einer jungen Künstlerin besteht aus einer Kugel, einer Stromschiene und einer Lampe, die an dieser Schiene befestigt ist.

Vor der Installation des Kunstwerks soll alles mit einem Koordinatenmodell berechnet werden. Der Mittelpunkt der Kugel befindet sich im Koordinatenursprung. Die Schiene wird an den Punkten $A(-4 \mid -5 \mid -4)$ und $B(9 \mid 21 \mid 22)$ befestigt, der Fußpunkt der Lampe im Punkt $C(0 \mid 3 \mid 4)$.

6.1 Zeigen Sie, dass sich der Fußpunkt der Lampe auf der Stromschiene befindet.

4 Punkte

6.2 Berechnen Sie die Entfernung des Fußpunkts der Lampe vom Mittelpunkt der Kugel.

2 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
6.1	**… zeigt, dass sich der Fußpunkt der Lampe auf der Stromschiene befindet.**	**4 (II)**
	$$g_S: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 21 \\ 22 \end{pmatrix} + t\left[\begin{pmatrix} 9 \\ 21 \\ 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 9 \\ 21 \\ 22 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$ für $t = -9$ gilt: $g_S: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 21 \\ 22 \end{pmatrix} + (-9) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, das heißt die Lampe liegt auf der Schiene zwischen den Befestigungspunkten, da der Punkt A von B aus für $t = -13$ erreicht wird.	
6.2	**… berechnet die Entfernung.**	**2 (I)**
	Da sich der Mittelpunkt der Kugel im Ursprung befindet, berechnet man die Länge des Vektors $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. $\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ Der Fußpunkt der Lampe hat einen Abstand vom Kugelmittelpunkt von 5 LE.	

Stochastik

Aufgabe 7 (Stochastik)

Eine Firma fertigt Liegestühle in zwei verschiedenen Städten. In der Stadt A werden $\frac{1}{5}$ ihrer Waren hergestellt und der Rest in der Stadt B.

Leider passieren auch Produktionsfehler. So sind $\frac{1}{10}$ der Liegestühle aus A und $\frac{1}{100}$ der Stühle aus B defekt.

7.1 Ein Prüfer wählt aus der Gesamtproduktion zufällig einen Stuhl aus.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Stuhl defekt ist.

3 Punkte

7.2 Die Firmenchefin wählt aus der Gesamtproduktion einen offensichtlich defekten Stuhl aus.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Stuhl in der Stadt A hergestellt worden ist.

3 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
7.1	**… berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass der Stuhl defekt ist.**	**3 (II)**
	$$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{10}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{100}=\frac{1}{50}+\frac{4}{500}=\frac{14}{500}=\frac{7}{250}$$ Die Wahrscheinlichkeit einen defekten Stuhl ausgewählt zu haben beträgt $\frac{7}{250}$.	
7.2	**… berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass der Stuhl in der Stadt A hergestellt worden ist.**	**3 (II)**
	$$P_d(A)=\frac{P(A\cap d)}{P(d)}=\frac{\frac{1}{50}}{\frac{7}{250}}=\frac{5}{7}$$ Die Wahrscheinlichkeit, dass der defekte Stuhl aus A kommt, beträgt $\frac{5}{7}$.	

Aufgabe 8 (Stochastik)

Ein Glücksrad hat drei gleich große Sektoren in den Farben rot, grün und blau.
Es wird viermal gedreht.
Die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse sollen berechnet werden:
A: Es tritt dreimal rot auf.
B: Es tritt mindestens dreimal blau auf.
C: Es tritt höchstens zweimal grün auf.
Geben Sie zu den vorgeschlagenen Lösungswegen zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten die Ereignisse an.

$4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4$ _____ $\qquad$ $4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$ _____

$1 - \left(\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \left(\frac{1}{3}\right)^4\right)$ _____ $\qquad$ $\binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1$ _____

6 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

8	**Der Prüfling …** **… gibt die Ereignisse an.**	**Punkte**
	$4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4$ B	**2 (II)**
	$1 - \left(\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \left(\frac{1}{3}\right)^4\right)$ C	**2 (II)**
	$4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$ A	**1 (II)**
	$\binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1$ A	**1 (II)**

Aufgabe 9 (Stochastik)

Eine Zufallsgröße X hat die in der Tabelle gegebene Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x_i	0	4	8	12	16
$P(x = x_i)$	c	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	d

mit $c, d \in \mathbb{R}$.

9.1 Berechnen Sie den Wert für d, so dass der Erwartungswert dieser Zufallsgröße $E(X) = 7$ beträgt.

4 Punkte

9.2 Berechnen Sie den Wert für c unter der Voraussetzung, dass $d = \frac{1}{8}$ ist.

2 Punkte

Kriterielle Beschreibung der erwarteten Leistung (Zuordnung zu den AFBs):

	Der Prüfling …	**Punkte**
9.1	**… berechnet den Wert für d.**	**4 (II)**
	$0 \cdot c + \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{8} \cdot 8 + \frac{1}{4} \cdot 12 + d \cdot 16 = 7 \Rightarrow d = \frac{1}{8}$	
9.2	**… berechnet den Wert für c.**	**2 (II)**
	$c + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1 \;\Rightarrow\; c = \frac{1}{4}$	

Bildnachweis

Bild 1 (S. 65): Diana Ryll v. 6.2.2015

Alle weiteren in diesem Dokument verwendeten Abbildungen, Tabellen und Skizzen wurden von den Mitgliedern der Aufgabenkommissionen erstellt.