Name: ____________________

Beispielaufgabe Abiturprüfung 2025

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung

Eine Funktion f ist gegeben durch die Funktionsgleichung $f\left(x\right)=x^3-3x$, $x\in\mathbb{R}$.
Der Graph von f ist in der *Abbildung* dargestellt.

a) (1) *Begründen Sie, dass der Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung ist.*

(2) Der Graph von f schließt mit der x-Achse im zweiten Quadranten eine Fläche ein.

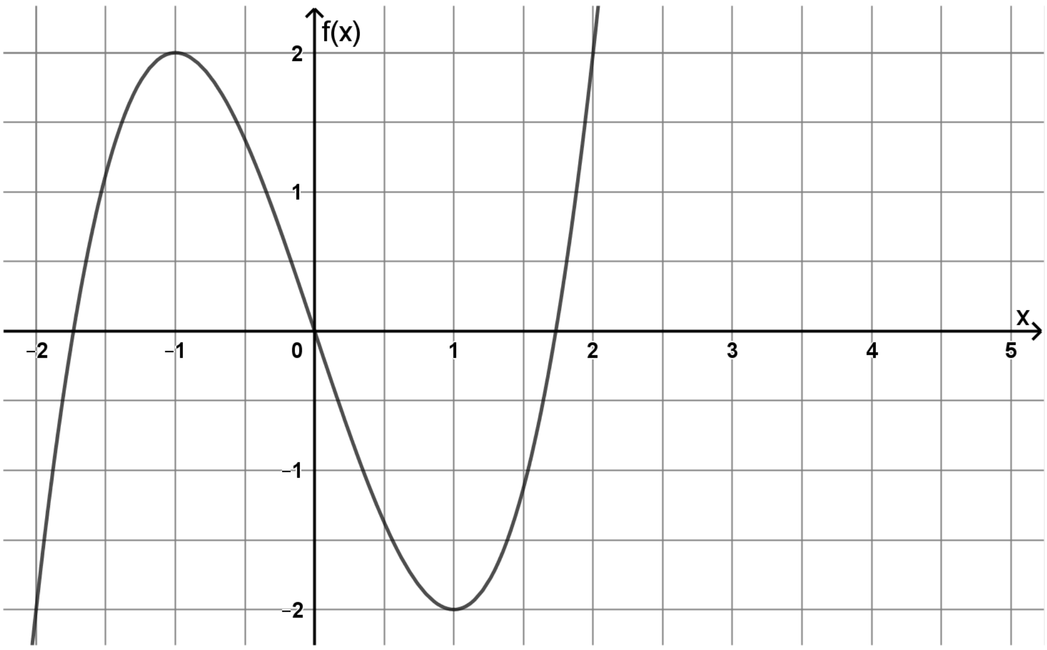
Bestimmen Sie rechnerisch den Inhalt A dieser Fläche.

[Zur Kontrolle: $A=2{,}25$ FE.]

(3) Gegeben ist die Gerade $g: y=-2x$, $x\in\mathbb{R}$.

Bestimmen Sie das Verhältnis, in dem die Gerade g die Fläche aus (2) *teilt.*

(1 + 3 + 4 Punkte)



Abbildung

Name: ____________________

b) Für jedes $k \in \mathbb{R}$ ist durch

$$u(x) = x^3 - 3k \cdot x + k^2 - 1$$

eine auf $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale Funktion gegeben.

(1) *Geben Sie den Wert von k an, für den die zugehörige Funktion u mit der Funktion f übereinstimmt.*

(2) *Bestimmen Sie alle Werte von k, für die* $u(2) = 2$ *gilt.*

(1 + 2 Punkte)

c) Gegeben ist die Funktion *h* mit $h(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

(1) (i) *Zeigen Sie:* $h'(x) = \mathrm{e}^{-x} \cdot \left(-x^2 + 2x\right)$.

(ii) *Berechnen Sie die Koordinaten und die Art der lokalen Extrempunkte des Graphen von h.*

[Zur Kontrolle: Die lokale Maximalstelle von *h* ist $x = 2.$]

(2) Die Punkte $P(0\,|\,0)$, $Q(r\,|\,0)$ und $R\big(r\,|\,h(r)\big)$ bilden für $0 \le u \le 10$ die Eckpunkte eines Dreiecks *PQR*.

Bestimmen Sie r so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks PQR maximal wird.

(3) *Beschreiben Sie, wie der Graph von j mit* $j(x) = 3 \cdot (x-2)^2 \cdot \mathrm{e}^{-(x-2)}$ *aus dem Graphen von h hervorgeht.*

Geben Sie den lokalen Hochpunkt des Graphen der Funktion j an.

(6 + 4 + 4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Beispielaufgabe Abiturprüfung 2025

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Innermathematische Argumentationsaufgabe / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2025

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu Kompetenzbereichen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
     - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen
     - Untersuchung von Funktionen des Typs $f(x) = p(x)e^{ax+b}$, wobei $p(x)$ ein Polynom mit maximal drei Summanden ist
     - Untersuchung von Funktionen, die sich als einfache Summe der oben genannten Funktionstypen ergeben
     - Interpretation und Bestimmung von Parametern der oben genannten Funktionen
     - Notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

---

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

Teilaufgabe a)

(1) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(-x) = (-x)^3 - 3 \cdot (-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$.

Daher ist der Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung.

(2) Nullstellen von f: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \vee x = 0 \vee x = \sqrt{3}$.

$$A = \int_{-\sqrt{3}}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = 2{,}25 \text{ [FE].}$$

(3) Die Schnittstellen des Graphen von f und der Gerade g sind -1, 0 und 1.

Im Bereich von -1 bis 0 verläuft die Gerade g unterhalb des Graphen von f.

Der Inhalt der vom Graphen von f und der Gerade g im zweiten Quadranten eingeschlossenen Fläche beträgt somit $\int_{-1}^{0} \left(f(x) - (-2x)\right)\mathrm{d}x = 0{,}25$ [FE].

$\frac{0{,}25}{2{,}25} = \frac{1}{9}$. Das Verhältnis der beiden Teilflächen ist 8:1.

Teilaufgabe b)

(1) $k = 1$.

(2) $u(2) = 2 \Leftrightarrow 8 - 6k + k^2 - 1 = 2 \Leftrightarrow k^2 - 6k + 5 = 0 \overset{\text{GTR}}{\Leftrightarrow} k = 1 \vee k = 5$.

Teilaufgabe c)

(1) (i) $h'(x) = -e^{-x} \cdot x^2 + e^{-x} \cdot 2x = e^{-x} \cdot \left(-x^2 + 2x\right)$.

(ii) Die für lokale Extremstellen von *h* notwendige Bedingung $h'(x) = 0$ ist für $x = 0$ und $x = 2$ erfüllt.

Da zusätzlich $h'(-1) = -3e \approx -8{,}15 < 0$, $h'(1) = e^{-1} \approx 0{,}37 > 0$ und $h'(3) = -3e^{-3} \approx -0{,}15 < 0$ gilt, liegt an der Stelle $x = 0$ ein lokales Minimum und an der Stelle $x = 1$ ein lokales Maximum von *h* vor.

Mit $h(0) = 0$ und $h(2) = 4e^{-2} \approx 0{,}54$ ergeben sich der lokale Tiefpunkt $T(0\,|\,0)$ und der lokale Hochpunkt $H\left(2\,|\,4e^{-2}\right)$ des Graphen von *h*.

(2) $A(r) = \frac{1}{2} \cdot r \cdot h(r)$.

Eine graphische Analyse liefert für $0 \le r \le 10$ den Tiefpunkt des Graphen von *A* bei $r = 3$.

(3) Der Graph von *j* geht durch die Hintereinanderausführung einer Streckung in *y*-Richtung mit dem Streckfaktor 3 und einer Verschiebung um 2 Einheiten nach rechts aus dem Graphen von *h* hervor.

Der lokale Hochpunkt des Graphen von *j* ist $\left(4\,|\,12e^{-2}\right)$.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass der Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung ist.	1			
2	(2) bestimmt rechnerisch den Inhalt A der Fläche.	3			
3	(3) bestimmt den Inhalt der Fläche, die im zweiten Quadranten vom Graphen von f und der Gerade g eingeschlossen wird.	3			
4	(3) bestimmt das Verhältnis, in dem die Gerade g die Fläche teilt.	1			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (8) …………………………………………………………………..... ………………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe a)		**8**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt den Wert von k an, für den die zugehörige Funktion u mit der Funktion f übereinstimmt.	1			
2	(2) bestimmt alle Werte von k, für die $u(2)=2$ gilt.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (3) …………………………………………………………………..... ………………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe b)		**3**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) (i) zeigt: $h'(x) = e^{-x} \cdot \left(-x^2 + 2x\right)$.	2			
2	(1) (ii) berechnet die Koordinaten und die Art der lokalen Extrempunkte des Graphen von *h*.	4			
3	(2) gibt einen Term an, mit dem der Flächeninhalt des Dreiecks in Abhängigkeit von *r* berechnet werden kann.	2			
4	(2) bestimmt *r* so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks maximal wird.	2			
5	(3) beschreibt, wie der Graph von *j* aus dem Graphen von *h* hervorgeht.	2			
6	(3) gibt den lokalen Hochpunkt des Graphen von *j* an.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (14) ……………………………………………………………….... ………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe c)		**14**			

Summe insgesamt	**25**			