Name: ____________________

Beispielaufgaben Abiturprüfung 2024 und 2025

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Von diesen sechs Wahlpflichtaufgaben müssen zwei beliebige Aufgaben bearbeitet werden.

Wahlpflichtaufgabe 1

Eine in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale, nicht lineare Funktion f mit erster Ableitungsfunktion f' und zweiter Ableitungsfunktion f'' hat folgende Eigenschaften:

- f hat bei x_1 eine Nullstelle.
- Es gilt $f'(x_2) = 0$ und $f''(x_2) \neq 0$.
- f' hat ein Minimum an der Stelle x_3.

Die *Abbildung 1* zeigt die Positionen von x_1, x_2 und x_3.

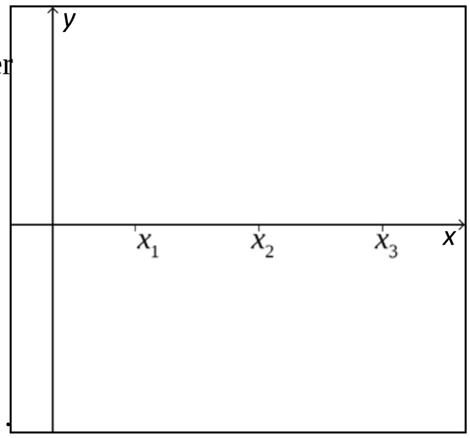


Abbildung 1

a) *Begründen Sie, dass der Grad von f mindestens* 3 *ist.*

b) *Skizzieren Sie in der Abbildung 1 einen möglichen Graphen von f.*

(2 + 3 Punkte)

Quelle: NRW Abitur 2023 LK HT A1, Teilaufgabe c)

Name: ____________________

Wahlpflichtaufgabe 2

Gegeben sind die Funktionen f und g mit

$$f(x) = (2\cdot x - 1)\cdot \mathrm{e}^{2\cdot x},\ x \in \mathbb{R},$$

und

$$g(x) = -x \cdot \mathrm{e}^{2\cdot x},\ x \in \mathbb{R}.$$

Die Graphen der beiden Funktionen sind in *Abbildung 1* dargestellt.

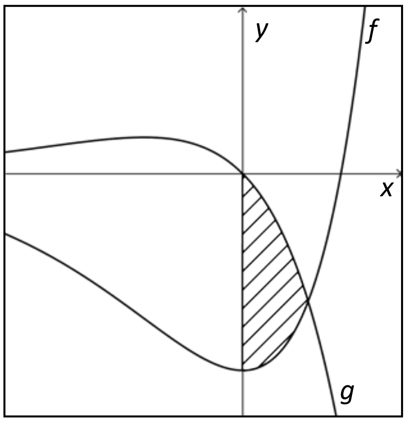


Abbildung 2

a) *Weisen Sie rechnerisch nach, dass* $x = \frac{1}{3}$ *die einzige Stelle ist, an der sich die beiden Funktionsgraphen schneiden.*

Weiterhin ist die Funktion D mit $D(x) = \left(-\frac{3}{2}\cdot x + \frac{5}{4}\right)\cdot \mathrm{e}^{2\cdot x},\ x \in \mathbb{R},$ gegeben.

b) *Weisen Sie nach, dass D eine Stammfunktion der Differenzfunktion d mit* $d(x) = g(x) - f(x)$ *ist.*

c) *Berechnen Sie den Flächeninhalt der schraffierten Fläche in Abbildung 2.*

(1 + 2 + 2 Punkte)

Quelle: NRW Abitur 2023 LK NT A1, Teilaufgabe d)

Name: ____________________

Wahlpflichtaufgabe 3

Die *Abbildung 3* zeigt in einem Koordinatensystem modellhaft ein 7 m breite Theaterkulisse. Die linke Seitenwand liegt im Modell in der xz-Ebene, die rechte Seitenwand ist dazu parallel. Ein auf der Bühne stehender Gegenstand wird von einer Lampe beleuchtet. Die Lampe wird im Modell durch den Punkt $L(4|0|5)$ dargestellt, die Spitze des Gegenstands durch den Punkt $S(1|6|2)$.

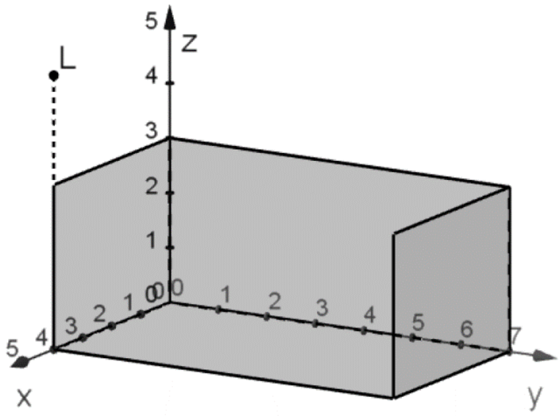


Abbildung 3

Untersuchen Sie rechnerisch, ob der Schatten der Spitze auf der rechten Seitenwand liegt.

(5 Punkte)

Quelle: IQB 2020 LK A Analytische Geometrie/Lineare Algebra (A2) Aufgabe 2, Aufgabengruppe 1

Wahlpflichtaufgabe 4

Die nicht maßstabsgetreue Abbildung 4 zeigt das Quadrat *ABCD*. Die Gerade g, die durch *B* und den Mittelpunkt M der Seite $\overline{AD}$ verläuft, hat den Richtungsvektor $\vec{v}$. Der Punkt F ist der Fußpunkt des Lots von A auf g.

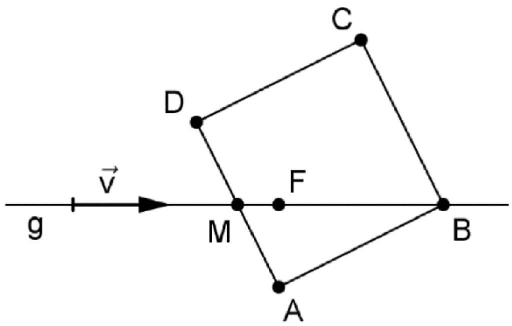


Abbildung 4

a) *Begründen Sie, dass $\left|\overline{BF}\right| = 2 \cdot \left|\overline{AF}\right|$ gilt.*

b) *Geben Sie einen Term an, mit dem man die Koordinaten von B bestimmen könnte, wenn die Koordinaten von A und F sowie die Komponenten von $\vec{v}$ bekannt wären.*

(3 + 2 Punkte)

Quelle: IQB 2022 LK A Analytische Geometrie/Lineare Algebra (A2) Aufgabe 4, Aufgabengruppe 2

Name: ____________________

Wahlpflichtaufgabe 5

Gegeben sind die mathematischen Ansätze I, II und III:

I $\quad 0{,}7^n \le 0{,}3$

II $\quad (1-p)^{12} + 12 \cdot p \cdot (1-p)^{11} \le 0{,}3$

III $\quad 0{,}7^{12} + 12 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^{11} + \binom{12}{2} \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^{10}$

Zwei dieser drei Ansätze lassen sich den folgenden Arbeitsaufträgen A, B bzw. C zuordnen. Alle drei Arbeitsaufträge beziehen sich auf eine binomialverteilte Zufallsgröße. Zu einem Ansatz passt kein Arbeitsauftrag und zu einem Arbeitsauftrag kein Ansatz.

A Gegeben sind die Parameter $n = 12$ und $p = 0{,}7$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für höchstens zwei Erfolge.

B Gegeben ist der Parameter $p = 0{,}3$. Die Wahrscheinlichkeit, keinen Erfolg zu erzielen, soll maximal 30 % betragen. Ermitteln Sie die Anzahl der Versuche.

C Gegeben sind die Parameter $n = 12$ und $p = 0{,}3$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für höchstens zwei Erfolge.

a) *Entscheiden Sie, welcher der Arbeitsaufträge welchem mathematischen Ansatz zugeordnet werden kann.*

b) *Geben Sie zu dem Arbeitsauftrag, dem kein mathematischer Ansatz zugeordnet werden konnte, einen passenden Ansatz an.*

c) *Geben Sie zu dem Ansatz, dem kein Arbeitsauftrag zugordnet werden konnte, einen passenden Arbeitsauftrag an.*

(2 + 1 + 2 Punkte)

Quelle: NRW Abitur 2021 WbK LK A, Teilaufgabe f)

Name: ____________________

Wahlpflichtaufgabe 6

Auf einem Schulfest wird in einer Würfelbude folgendes Spiel angeboten:

Nach einem Einsatz von 0,50 € darf man dreimal mit einem normalen Würfel würfeln. Für jede gewürfelte 6 erhält man 1 €. Die Zufallsgröße X gibt den Auszahlungsbetrag an.

a) *Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(X = k)$ in folgender Tabelle an:*

k	0 €	1 €	2 €	3 €
$P(X = k)$				

b) *Ermitteln Sie, wie hoch der Einsatz für ein Spiel mindestens sein muss, damit die Betreiber der Würfelbude bei diesem Spiel auf lange Sicht Gewinn machen.*

(3 + 2 Punkte)

Quelle: NRW Abitur 2023 LK NT A2, Teilaufgabe f)

Hinweis:

Zeichengeräte sowie ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung sind zugelassen.

Unterlagen für die Lehrkraft

Beispielaufgabe Abiturprüfung 2024 und 2025

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

1. Aufgabenart

Hilfsmittelfrei zu bearbeitende Aufgabe

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Kernlehrplänen und den Vorgaben 2024 und 2025

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu Kompetenzbereichen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen:

1. Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte

Funktionen und Analysis
- Funktionen als mathematische Modelle
- Fortführung der Differentialrechnung
- Grundverständnis des Integralbegriffs
- Integralrechnung

Analytische Geometrie und Lineare Algebra
- Lineare Gleichungssysteme
- Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
- Lagebeziehungen und Abstände
- Skalarprodukt

Stochastik
- Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Binomialverteilung und Normalverteilung
- Testen von Hypothesen

2. Medien/Materialien
- entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Hinweis

- Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

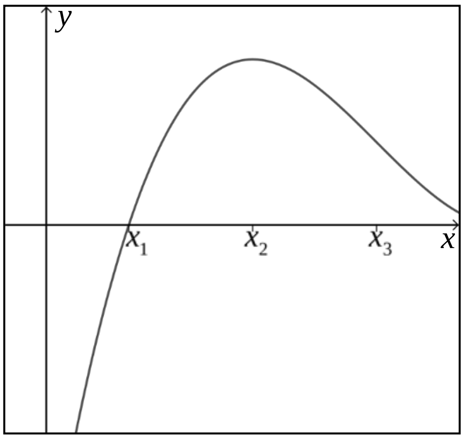
6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Wahlpflichtaufgabe 1

a) Da f' an der Stelle x_3 ein Minimum hat [und f' nicht konstant sein kann, da f laut Aufgabenstellung keine lineare Funktion ist], ist der Grad von f' mindestens 2 und damit der Grad von f mindestens 3.

b) Mögliche Lösung:



Wahlpflichtaufgabe 2

a) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow (2\cdot x - 1)\cdot e^{2\cdot x} = -x\cdot e^{2\cdot x} \Leftrightarrow 3\cdot x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$

b) Mit Hilfe der Produkt- und der Kettenregel ergibt sich:
$$D'(x) = -\frac{3}{2}\cdot e^{2\cdot x} + \left(-\frac{3}{2}\cdot x + \frac{5}{4}\right)\cdot 2\cdot e^{2\cdot x} = (-3\cdot x + 1)\cdot e^{2\cdot x} = g(x) - f(x).$$

c) $$A = \int_0^{\frac{1}{3}} \left(g(x) - f(x)\right) \mathrm{d}x = \left[\left(-\frac{3}{2}\cdot x + \frac{5}{4}\right)\cdot e^{2\cdot x}\right]_0^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{5}{4}\right)\cdot e^{\frac{2}{3}} - \left(-\frac{3}{2}\cdot 0+\frac{5}{4}\right)\cdot e^{0}$$

$$= \frac{3}{4}\cdot e^{\frac{2}{3}} - \frac{5}{4}\ \text{[FE]}.$$

Wahlpflichtaufgabe 3

Alle Punkte der rechten Seitenwand haben im Modell die y-Koordinate 7.

$$\overrightarrow{OL} + \frac{7}{6}\cdot\overrightarrow{LS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{7}{6}\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 7 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$$

Da $0 < 0{,}5 < 4$ und $0 < 1{,}5 < 3$ gilt, liegt der Schatten auf der rechten Seitenwand.

Wahlpflichtaufgabe 4

a) Die Dreiecke *ABM* und *ABF* haben bei *B* einen gemeinsamen Winkel und außerdem jeweils einen rechten Winkel, d. h. die beiden Dreiecke sind ähnlich.
$\left|\overline{AB}\right| = 2\left|\overline{AM}\right|$
Damit gilt $\dfrac{\left|\overline{BF}\right|}{\left|\overline{AF}\right|} = \dfrac{\left|\overline{AB}\right|}{\left|\overline{AM}\right|} = 2$.

b) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OF} + 2\cdot\left|\overline{AF}\right|\cdot\dfrac{\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|}$

Wahlpflichtaufgabe 5

a) Dem Arbeitsauftrag B kann Ansatz I zugeordnet werden.
Dem Arbeitsauftrag C kann Ansatz III zugeordnet werden.

b) Zum Arbeitsauftrag A passt der Ansatz: $0{,}3^{12} + 12\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3^{11} + \binom{12}{2}\cdot 0{,}7^{2}\cdot 0{,}3^{10}$

c) Der folgende Arbeitsauftrag passt zu Ansatz II:
Gegeben ist der Parameter $n = 12$. Die Wahrscheinlichkeit, höchstens einen Erfolg

zu erzielen, soll höchstens 30% betragen. Bestimmen Sie die Erfolgswahrscheinlichkeit p.

Wahlpflichtaufgabe 6

a)

k	0 €	1 €	2 €	3 €
$P(X=k)$	$\left(\frac{5}{6}\right)^3$	$3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^1$	$\left(\frac{1}{6}\right)^3$

b) Für den Erwartungswert $E(X)$ der Zufallsgröße X gilt:

$$E(X)=\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot 0\,€+3\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot 1\,€+3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{5}{6}\cdot 2\,€+\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot 3\,€$$

$$=\frac{25}{72}\,€+\frac{10}{72}\,€+\frac{1}{72}\,€$$

$$=\frac{36}{72}\,€=0{,}50\,€.$$

Der Einsatz für ein Spiel muss mindestens 0,51 € hoch sein, damit die Betreiber der Würfelbude auf lange Sicht Gewinn machen.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Der Prüfling hat die Wahlpflichtaufgaben Nr. ____ und Nr. ____ zur Bewertung ausgewählt.

Wahlpflichtaufgabe 1

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	a) begründet, dass der Grad von f mindestens 3 ist.	2			
2	b) skizziert in der *Abbildung 1* einen möglichen Graphen von f.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Wahlpflichtaufgabe 1	**5**			

Wahlpflichtaufgabe 2

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	a) weist rechnerisch nach, dass $x = \frac{1}{3}$ die einzige Stelle ist, an der sich die beiden Funktionsgraphen schneiden.	1			
2	b) weist nach, dass D eine Stammfunktion der Differenzfunktion d mit $d(x) = g(x) - f(x)$ ist.	2			
3	c) berechnet den Flächeninhalt der schraffierten Fläche in *Abbildung 2*.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Wahlpflichtaufgabe 2	**5**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Wahlpflichtaufgabe 3

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreich-bare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	untersucht rechnerisch, ob der Schatten der Spitze auf der rechten Seitenwand liegt.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ………………………………………………………………….... …………………………………………………………………					
	Summe Wahlpflichtaufgabe 3	**5**			

Wahlpflichtaufgabe 4

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreich-bare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	a) begründet, dass $\left\|\overline{BF}\right\| = 2 \cdot \left\|\overline{AF}\right\|$ gilt.	3			
2	b) gibt einen Term an, mit dem man die Koordinaten von *B* bestimmen könnte.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ………………………………………………………………….... …………………………………………………………………					
	Summe Wahlpflichtaufgabe 4	**5**			

Wahlpflichtaufgabe 5

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	a) entscheidet, welcher Arbeitsauftrag welchem Ansatz zugeordnet werden kann.	2			
2	b) gibt einen, zu Arbeitsauftrag A passenden, mathematischen Ansatz an.	1			
3	c) gibt zu Ansatz II einen passenden Arbeitsauftrag an.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………….... ………………………………………………………………					
	Summe Wahlpflichtaufgabe 5	**5**			

Wahlpflichtaufgabe 6

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	a) gibt die Wahrscheinlichkeiten $P(X=k)$ in der Tabelle an.	3			
2	b) ermittelt, wie hoch der Einsatz für ein Spiel mindestens sein muss, damit die Betreiber der Würfelbude bei diesem Spiel auf lange Sicht Gewinn machen.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Wahlpflichtaufgabe 6	**5**			

Summe der zu bewertenden zwei Wahlpflichtaufgaben	**10**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.