



Name: _____

Beispielaufgabe Abiturprüfung 2025

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

In einer Anlage zur Getränkeabfüllung wird eine Maschine zur Abfüllung von 330 ml-Flaschen betrieben. Durch diese Maschine werden nicht immer genau 330 ml in eine Flasche abgefüllt, die Füllmengen streuen etwas. Eine Flasche, in die gerundet weniger als 330 ml abgefüllt werden, wird im Kontext dieser Aufgabe als Minderbefüllung bezeichnet. In den Herstellerangaben für die Maschine steht, dass mit 30 % Minderbefüllungen gerechnet werden kann.

a) Es sollen 100 zufällig ausgewählte Flaschen dieser Maschine untersucht werden. Die Zufallsgröße X : „Anzahl der Minderbefüllungen“ in einer Stichprobe wird als binomialverteilt angenommen mit $p = 0,3$.

(1) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Es treten weniger als 30 Minderbefüllungen auf.“*

(2) *Geben Sie ein Ereignis im gegebenen Sachzusammenhang an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $0,3^4 \cdot \binom{96}{25} \cdot 0,3^{25} \cdot 0,7^{71}$ berechnet werden kann.*

(2 + 2 Punkte)

b) Der für die Abfüllmaschine verantwortliche Maschinenmeister hat die Vermutung, dass die Maschine eigentlich besser arbeitet als angegeben. Mit der Wahl von $H_0 : p \geq 0,3$ als Nullhypothese möchte er seine Vermutung mit einer Stichprobe von 100 Flaschen überprüfen. Die Anzahl der Minderbefüllungen in der Stichprobe wird wiederum als binomialverteilt angenommen.

(1) *Ermitteln Sie eine zur Nullhypothese passende Entscheidungsregel auf dem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$.*



Name: _____

(2) *Beschreiben Sie den Fehler 2. Art im Sachzusammenhang.*

(4 + 2 Punkte)

c) Der Getränkehersteller schafft eine weitere Maschine an. Es wird davon ausgegangen, dass die Füllmengen aller Flaschen jeweils unabhängig voneinander sind. Die stetige Zufallsgröße Y : „Füllmenge einer zufällig ausgewählten in dieser Maschine abgefüllten Flasche“ wird normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 331[\text{ml}]$ und der Standardabweichung $\sigma = 1,34[\text{ml}]$ angenommen. Eine Befüllung mit höchstens 327 ml wird im Folgenden als gravierende Minderbefüllung bezeichnet.

(1) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig entnommene Flasche eine gravierende Minderbefüllung ist.*

Geben Sie Ihr Ergebnis auf fünf Nachkommastellen gerundet an.

[Kontrolllösung mit vier Nachkommastellen: 0,0014.]

(2) *Ermitteln Sie die zu erwartende Anzahl von gravierenden Minderbefüllungen in einer Stichprobe von 1500 Flaschen.*

(3) *Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Stichprobe von 750 Flaschen mehr als zwei gravierende Minderbefüllungen enthält.*

(4) Der Getränkehersteller ändert die Parameter der Maschine auf $\mu_{\text{neu}} = 330[\text{ml}]$ und $\sigma_{\text{neu}} = 1,00[\text{ml}]$.

Interpretieren Sie die veränderten Parameter im Sachkontext.

Beurteilen Sie, wie sich die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Flasche eine gravierende Minderbefüllung ist, durch die Änderung der Parameter verändert.

(2 + 2 + 2 + 4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Beispielaufgaben Abiturprüfung 2025

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Stochastik

2. Aufgabenstellung¹

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2025

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu Kompetenzbereichen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte

Stochastik

- Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Binomialverteilung und Normalverteilung
- Testen von Hypothesen

2. Medien/ Materialien

- entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

¹ Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) $P_{100;0,3}(X < 30) = P_{100;0,3}(X \leq 29) \approx 0,462$.

(2) Mögliches Ereignis „Bei der Stichprobe von 100 Flaschen sind die ersten vier Flaschen Minderbefüllungen. Von den restlichen 96 Flaschen sind noch genau 25 Minderbefüllungen“.

Teilaufgabe b)

(1) $P_{100;0,3}(X \leq 22) \approx 0,048 < 0,05$ und $P_{100;0,3}(X \leq 23) \approx 0,076 > 0,05$.

Als Entscheidungsregel ergibt sich in diesem Fall: Verwirf die Nullhypothese, falls $X_2 \leq 22$, also falls 22 oder weniger Flaschen Minderbefüllungen sind.

(2) Ein Fehler 2. Art liegt vor, wenn die Nullhypothese aufgrund des Ausgangs des Zufallsexperimentes nicht verworfen wird, obwohl sie in Wirklichkeit aber falsch ist. Der Maschinenmeister würde in einem solchen Fall also fälschlicherweise davon ausgehen, dass die Maschine tatsächlich nicht so gut arbeitet, wie von ihm vermutet.

Teilaufgabe c)

(1) Y ist normalverteilt mit $\mu = 331[\text{ml}]$ und $\sigma = 1,34[\text{ml}]$.

Es ist $P(Y \leq 327) \approx 0,00142$.

(2) Die Zufallsgröße Z gibt die Anzahl gravierender Minderbefüllungen in einer Stichprobe von n Flaschen an. Z ist binomialverteilt mit $n = 1500$ und $p = 0,00142$.

Für den Erwartungswert von Z gilt: $E(Z) = n \cdot p = 1500 \cdot 0,00142 = 2,13$.

In der Stichprobe kann man zwei gravierende Minderbefüllungen erwarten.

(3) Z ist nun binomialverteilt mit $n = 750$ und $p = 0,00142$.

$$P_{750;0,00142}(Z \geq 3) \approx 0,0925.$$

- (4) Da $\mu_{\text{neu}} < \mu$ gilt, wird durchschnittlich weniger in die Flaschen gefüllt, der Getränkehersteller spart also bei der Befüllung der Flaschen.

Die Füllmenge streut aber weniger als vor der Änderung, da $\sigma_{\text{neu}} < \sigma$ gilt.

Y ist nun normalverteilt mit $\mu_{\text{neu}} = 330$ [ml] und $\sigma_{\text{neu}} = 1,00$ [ml].

$P_{\text{neu}}(Y \leq 327) \approx 0,00135 < 0,00142$. Die Wahrscheinlichkeit für eine gravierende Mindebefüllung sinkt also aufgrund der Änderung.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: _____ Kursbezeichnung: _____

Schule: _____

Teilaufgabe a)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK ²	ZK	DK
1	(1) bestimmt die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Es treten weniger als 30 Minderbefüllungen auf.“	2			
2	(2) gibt eine Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $0,3^4 \cdot \binom{96}{25} \cdot 0,3^{25} \cdot 0,7^{71}$ berechnet werden kann.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4)					
Summe Teilaufgabe a)		4			

Teilaufgabe b)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) ermittelt eine zur Nullhypothese passende Entscheidungsregel.	4			
2	(2) beschreibt den Fehler 2. Art im Sachzusammenhang.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6)					
Summe Teilaufgabe b)		6			

² EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig entnommene Flasche eine gravierende Minderbefüllung ist.	2			
2	(2) ermittelt die zu erwartende Anzahl von gravierenden Minderbefüllungen in einer Stichprobe von 1500 Flaschen.	2			
3	(3) ermittelt die Wahrscheinlichkeit, dass eine Stichprobe von 750 Flaschen mehr als zwei gravierende Minderbefüllungen enthält.	2			
4	(4) interpretiert die veränderten Parameter im Sachkontext.	2			
5	(4) beurteilt, wie sich die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Flasche eine gravierende Minderbefüllung ist, durch die Änderung der Parameter verändert.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (10)					
Summe Teilaufgabe c)		10			

Summe insgesamt	20			
------------------------	-----------	--	--	--