Name: ____________________

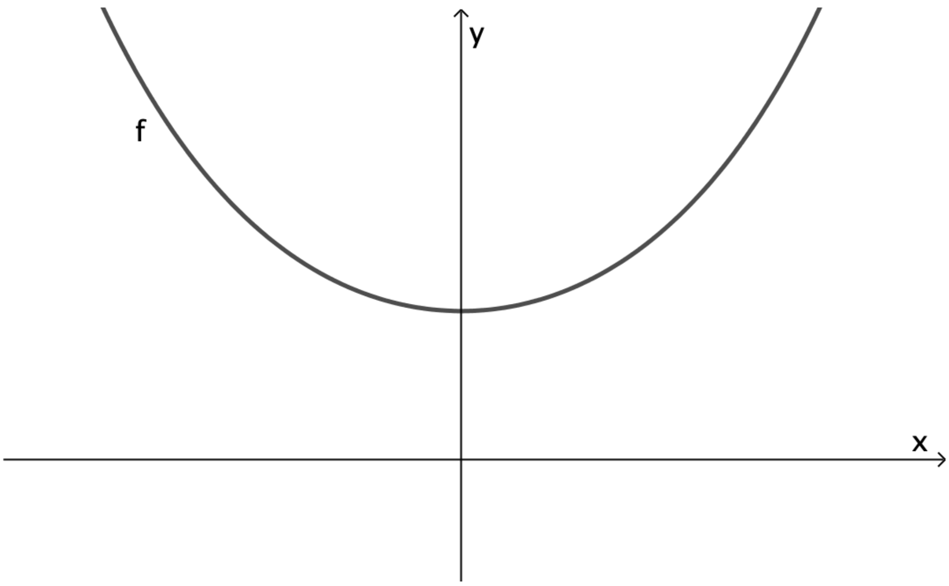
Beispielaufgabe Abiturprüfung 2025

Mathematik, Grundkurs WBK
weitere (kurze) Analysisaufgabe mit 15 BE

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^x + e^{-x}\right)$. Der Graph von f ist in der *Abbildung* dargestellt.



Abbildung

Name: ____________________

a) (1) Der Punkt P ist der Schnittpunkt des Graphen von f mit der y-Achse.

Der Punkt Q liegt auf dem Graphen von f und hat die x-Koordinate $\ln(2)$.

Geben Sie die Koordinaten von P und Q an und ermitteln Sie eine Gleichung der Sekante s durch P und Q.

(2) *Begründen Sie, dass die Funktion f keine Nullstellen besitzt.*

(4 + 1 Punkte)

b) (1) *Zeigen Sie, dass* $f''(x) = f(x)$ *gilt und interpretieren Sie diese Aussage in Bezug auf die maximal mögliche Anzahl von Wendepunkten des Graphen von f.*

(2) *Berechnen Sie die Koordinaten und die Art der lokalen Extrempunkte des Graphen von f.*

(3) *Zeigen Sie, dass* $f(-x) = f(x)$ *gilt und interpretieren Sie diese Aussage geometrisch.*

(3 + 3 + 2 Punkte)

c) *Ermitteln Sie a so, dass der Inhalt der Fläche, die im Intervall* $[-a; a]$ *zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion f liegt,* 40 FE *beträgt.*

(2 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Beispielaufgaben Abiturprüfung 2025

Mathematik, Grundkurs WBK
weitere (kurze) Analysisaufgabe mit 15 BE

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Innermathematische Argumentationsaufgabe / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2025

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu Kompetenzbereichen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
     - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen
     - Untersuchung von Funktionen des Typs $f(x) = p(x)e^{ax+b}$, wobei $p(x)$ ein Polynom mit maximal drei Summanden ist
     - Untersuchung von Funktionen, die sich als einfache Summe der oben genannten Funktionstypen ergeben
     - Notwendige Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel)
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

2. *Medien/Materialien:*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

Teilaufgabe a)

(1) $f(0) = 1 \Rightarrow P(0\,|\,1)$, $f(\ln(2)) = 1{,}25 \Rightarrow Q(\ln(2)\,|\,1{,}25)$.

Ansatz: $s: y = m \cdot x + 1$.

Einsetzen der Koordinaten von Q liefert:

$$1{,}25 = m \cdot \ln(2) + 1 \Leftrightarrow m = \frac{0{,}25}{\ln(2)} = \frac{1}{4 \cdot \ln(2)} \approx 0{,}36 \ \Rightarrow s: y = 0{,}36 \cdot x + 1.$$

(2) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\mathrm{e}^{x} > 0$ und $\mathrm{e}^{-x} > 0$ und somit $\frac{1}{2} \cdot \left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right) > 0$.

Teilaufgabe b)

(1) $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right)$, $f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\mathrm{e}^{x} - \left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right) = f(x)$.

Da f und somit auch f'' keine Nullstellen besitzen (vgl. a) (2)), besitzt der Graph der Funktion f keine Wendepunkte.

(2) Notwendige Bedingung für lokale Extremstellen von f: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Zusätzlich gilt $f''(0) = 1 > 0$.

$P(0\,|\,1)$ ist lokaler Tiefpunkt und einziger lokaler Extrempunkt des Graphen von f.

(3) $f(-x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-(-x)}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}\right) = f(x)$.

Daraus folgt, dass der Graph von f symmetrisch zur y-Achse verläuft.

Teilaufgabe c)

Für den Ansatz $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 40$ liefert der GTR die Lösung $a \approx 3{,}69$.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt die Koordinaten von P und Q an.	2			
2	(1) ermittelt die Gleichung der Sekante s.	2			
3	(2) begründet, dass die Funktion f keine Nullstellen besitzt.	1			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………….... …………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe a)		**5**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass $f''(x)=f(x)$ gilt.	2			
2	(1) interpretiert die Aussage in Bezug auf die maximal mögliche Anzahl von Wendepunkten des Graphen von f.	1			
3	(2) berechnet die Koordinaten und die Art der Extrempunkte des Graphen von f.	3			
4	(3) zeigt, dass $f(-x)=f(x)$ gilt und interpretiert die Aussage geometrisch.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (8) …………………………………………………………….... …………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe b)		**8**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt a so, dass der Inhalt der Fläche, die im Intervall $[-a;a]$ zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion f liegt, 40 FE beträgt.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (2) …………………………………………………………………….... ………………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe c)		**2**			

Summe insgesamt		**15**			